Aufgabe 1: Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Für $n\in\mathbb{N}$ ist die n–te Iterierte f^n von f definiert durch:

$$f^n(x) := \begin{cases} x, & n=0,\\ f(x), & n=1,\\ (f\circ f^{n-1})(x), & n\geq 2. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie f^2 für die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x(1-x)$.

(b) Zeigen Sie, daß f^n für alle $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ differenzierbar ist und daß die Ableitung gegeben ist durch

$$(f^n)'(x)=\prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(x)),\quad x\in\mathbb{R}.$$

3 Punkte

Aufgabe 2: Seien $0<a<b$ zwei reelle Zahlen. Beweisen Sie

$$\int_a^b \frac{x^4-x^3+2x^2+x+1}{x^5+2x^3+x}\,dx = \frac{b}{b^2+1}+\ln(b)-\frac{a}{a^2+1}-\ln(a).$$

2 Punkte

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{|x+1|+2}{1-x}>1.$$

3 Punkte

Aufgabe 4: Sei

$$z=\sqrt{2}\,\frac{1+i}{1-i}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

(a) Stellen Sie z in der Form $a+ib$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ dar.

(b) Stellen Sie z in der Form $re^{i\varphi}$ mit $r\in\mathbb{R}_+$ und $\varphi\in[0,2\pi)$ dar.

Hinweis: $\sin(\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2 Punkte

Aufgabe 5:

(a) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(i+1)-1}-\frac{1}{n(i+1)+1}\right)$ auf Konvergenz.

(b) Bestimmen Sie alle $x\in\mathbb{R}$, für die die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n n^n}{n!(n+1)!}$ konvergiert.

4 Punkte

Aufgabe 6: Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{\ln\frac{3}{4}}^{0}\frac{e^x\sin(\pi e^x)}{(\cos(\pi e^x))^3}\,dx$. Hinweis: Substituieren Sie $y=\cos(\pi e^x)$.

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(x)e^x\,dx$. Hinweis: Mehrfache partielle Integration.

4 Punkte

Aufgabe 7: Berechnen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-\ln(n^{2n+1})}{n\ln(3n)}.$$

2 Punkte

1) a) $\forall x\in\mathbb{R}\quad f^2(x) = f(x(1-x)) = x(1-x)(1-x(1-x))$ $\boxed{1}$

b) IA: $\forall x\in\mathbb{R}\quad (f^1)'(x) = f'(x) = \prod_{k=0}^{0} f'(f^k(x))$ $\boxed{\frac{1}{2}}$

IV: Angenommen für ein $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ gilt: $\forall x\in\mathbb{R}\ (f^n)'(x) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(x))$

IBeh: Dann gilt auch: $\forall x\in\mathbb{R}\ (f^{n+1})'(x) = \prod_{k=0}^{n} f'(f^k(x))$ $\boxed{\frac{1}{2}}$

IBew: $\forall x\in\mathbb{R}\quad (f^{n+1})'(x) = (f\circ f^n)'(x) = f'(f^n(x))\cdot (f^n)'(x)$ $\boxed{1}$

$\overset{IV}{=} f'(f^n(x)) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(x)) = \prod_{k=0}^{n} f'(f^k(x))$

2) Da $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^4-x^3+2x^2+x+1}{x^5+2x^3+x}$ ist stetig $\boxed{\frac{1}{2}}$

und $\forall x\in(a,b)\quad \left(\frac{x}{x^2+1}+\ln x\right)' = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x} = \frac{x^3+x-2x^3+x^4+2x^2+1}{x(x^2+1)^2}$

$= \frac{x^4-x^3+2x^2+x+1}{x^5+2x^3+x} = f(x)$ $\boxed{\frac{1}{2}}$

gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{x}{x^2+1}+\ln x\Big|_a^b = \frac{b}{b^2+1} + \ln b - \frac{a}{a^2+1} - \ln a$ $\boxed{\frac{1}{2}}$

3) 1. Fall: $x<-1$ $\quad \frac{|x+1|+2}{1-x} > 1 \iff -x-1+2 > 1-x \iff 1>1$ $\boxed{1}$

$\Rightarrow L_1 = \emptyset$

2. Fall: $-1\le x<1$ $\quad \frac{|x+1|+2}{1-x} > 1 \iff x+1+2 > 1-x \iff x>-1$ $\boxed{1}$

$\Rightarrow L_2 = (-1,1)$

3. Fall: $1<x$ $\quad \frac{|x+1|+2}{1-x} > 1 \iff x+1+2 < 1-x \iff x<-1$ $\boxed{1}$

$\Rightarrow L_3 = \emptyset$

$\Rightarrow$ Die Lösungsmenge der Ungleichung ist: $L=(-1,1)$

ohne dies $\boxed{-\frac{1}{2}}$

4) a) $z = \sqrt{2}\,\frac{1+i}{1-i}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,\frac{(1+i)^2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right) = i(1+i) = -1+1\cdot i$

b) $z = -1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$ $\boxed{1}$

5) a) $\forall n\ge 1\quad \left|\frac{1}{n(i+1)-1} - \frac{1}{n(i+1)+1}\right| = \left|\frac{n(i+1)+1-n(i+1)+1}{n^2(i+1)^2-1}\right|$ $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\overset{\boxed{\frac{1}{2}}}{=} \left|\frac{2}{2n^2i-1}\right| = \frac{2}{\sqrt{4n^4+1}} < \frac{2}{\sqrt{4n^4}} = \frac{1}{n^2}$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkrit. auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(i+1)-1} - \frac{1}{n(i+1)+1}$ (absolut) $\boxed{1}$

b) $\forall x\in\mathbb{R}\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-x)^{n+1}(n+1)^{n+1}\,n!\,(n+1)!}{(n+1)!\,(n+2)!\,(-x)^n\,n^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n+2}$ $\boxed{\frac{1}{2}}$

$= |x|\cdot e\cdot 0 = 0 < 1$ $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow$ für alle $x\in\mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n n^n}{n!(n+1)!}$ nach dem QK. (absolut). $\boxed{1}$

6) a) $\int_{\ln\frac{3}{4}}^{0}\frac{e^x\sin(\pi e^x)}{\cos(\pi e^x)^3}\,dx \overset{\boxed{\frac{1}{2}}}{=} -\frac{1}{\pi}\int_{\cos(\frac{3}{4}\pi)}^{\cos(\pi)}\frac{1}{y^3}\,dy \overset{\boxed{\frac{1}{2}}}{=} \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{y^2}\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-1}$

$\left.\begin{array}{l} y=\cos(\pi e^x) \\ \Rightarrow dy = -\sin(\pi e^x)\cdot\pi\cdot e^x dx \end{array}\right\}$ $\boxed{\frac{1}{2}}$ $\quad = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{2\pi}$ $\boxed{\frac{1}{2}}$

b) $\int_0^{\pi}\cos x\, e^x\,dx \overset{\boxed{\frac{1}{2}}}{=} \sin x\, e^x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\, e^x\,dx \overset{\boxed{\frac{1}{2}}}{=} -\left(-\cos x\, e^x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}-\cos x\, e^x\,dx\right)$

$\overset{\boxed{\frac{1}{2}}}{=} -e^{\pi}-1 - \int_0^{\pi}\cos x\, e^x\,dx$

$\Rightarrow \int_0^{\pi}\cos x\, e^x\,dx = \frac{-e^{\pi}-1}{2}$ $\boxed{\frac{1}{2}}$

7) $\lim_{n\to\infty}\frac{n-\ln(n^{2n+1})}{n\ln(3n)} \overset{\boxed{\frac{1}{2}}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{n-(2n+1)\ln n}{n\ln n + n\ln 3} \overset{\boxed{1}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n\left(\frac{1}{\ln n}-2-\frac{1}{n}\right)}{n\ln n\left(1+\frac{\ln 3}{\ln n}\right)}$

$\overset{\boxed{\frac{1}{2}}}{=} -2$