Mathematik für Informatiker II
Nachklausur SS 2001

Vorbemerkung

Diese Klausur wurde von Martin Stephan (http://www.gumbler.de) zur Verfügung gestellt. Damit die Klausursammlung aber immer aktuell bleibt, brauchen wir Deine Mithilfe! Wenn du in einer Klausur noch ein paar Minuten Zeit hast, schreibe doch ein paar Aufgaben ab, damit auch sptere Semester etwas davon haben. Schicke deine Aufschriebe an felix@freitagsrunde.org oder stelle sie selbst in unsere Klausursammlung unter http://wiki.freitagsrunde.org ein. Vielen Dank - deine Freitagsrunde.

Aufgabe 1:

Geben Sie **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

(a) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n : x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0$ oder $y = 0)$.

(b) Ist die Determinante einer Matrix $A \in M(n, n)$ ungleich Null, so ist der $RgA = n$.

(c) Für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$ gilt: $|a \cdot b| \leq ||a||\ ||b||$.

(d) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Dann gilt für alle (n, n)-Matrizen $A, B : AB = BA$

(e) Sei A eine (n, n)-Matrix mit der $det\ A = 0$. Dann hat für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $Ax = b$ unendlich viele Lösungen.

(f) Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Dann ist die Menge $v \in \mathbb{R}^n : F(v) = 0$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

3 Punkte

Aufgabe 2:

Sei A eine (n, n)-Matrix. Beweisen Sie die folgende Aussage:
Die Determinante von A ist genau dann gleich Null, wenn Null ein Eigenwert von A ist.

3 Punkte

Aufgabe 3:

Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & (\alpha + 1)^2 & -2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Anzahl (keine, genau eine bzw. unendlich viele) der Lösungen der Gleichung $Ax = b$.

(b) Bestimmen Sie für $\alpha = 2$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$.

(c) Bestimmen Sie für $\alpha = -1$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$.

4 Punkte

Aufgabe 4:

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen.

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E, die alle drei Punkte enthält.

(c) Bestimmen Sie einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $n \in \mathbb{R}^3$, der senkrecht auf E steht.

(d) Überprüfen Sie, ob der Koordinatenursprung in der Ebene E liegt.

4 Punkte

Aufgabe 5:

Überprüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen des Vektorraums $C(\mathbb{R})$ Untervektorräume sind.

(a) $U = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(1) + f(2) = 2\}$.

(b) $U = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(-1) + f(1) + f(0) = 0\}$.

Hinweis: $C(\mathbb{R})$ ist der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3 Punkte

Aufgabe 6:

Seien $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Determinanten von A und von B.

(b) Untersuchen Sie, ob die Spaltenvektoren von A linear unabhngig sind.

(c) Untersuchen Sie, ob die Zeilenvektoren von B linear unabhngig sind.

3 Punkte

Mathematik für Informatiker II
Musterlösung Nachklausur SS 2001

Aufgabe 1:

(a) falsch

(b) wahr

(c) wahr

(d) falsch

(e) falsch

(f) wahr

Aufgabe 2:

$det\ A = 0 \Leftrightarrow A$ ist singulär
$\Leftrightarrow Kern\ A \supset \{0\}$
$\Leftrightarrow \exists\, v \in \mathbb{R}^n | \{0\} : Av = 0$
$\Leftrightarrow$ Es existiert Eigenvektor zum EW 0
$\Leftrightarrow$ 0 ist EW

Aufgabe 3:

$$\left[\begin{array}{ccccc} \alpha & \alpha+1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & (\alpha+1)^2 & -2 & | & -3 \end{array}\right] \overset{I \leftrightarrow II}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 1 & | & 2 \\ 1 & (\alpha+1)^2 & -2 & | & -3 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{II-\alpha I \\ III-I}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 1-\alpha & | & 2 \\ 0 & (\alpha+1)^2 & -3 & | & -3 \end{array}\right] \overset{III-(\alpha+1)II}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 1-\alpha & | & 2 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & | & -2\alpha-5 \end{array}\right]$$

(a)

α	Anzahl der Lösungen
2 oder -2	keine
-1	unendlich viele

(b) Lösungsmenge: $L = \{\}$

(c) $Ax = b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & -3 & | & -3 \end{array}\right] \Rightarrow (x_1 = -1, x_2 = t, x_3 = 1 \,|\, t \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge: $L = \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \ t \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 4:

(a) $det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2 - 1 = 2 \Rightarrow 2 \neq 0$

$\Rightarrow P_1, P_2, P_3$ linear unabhängig $\Rightarrow$ liegen nicht auf einer Geraden

(b) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & -1 \\ 1 & 2 & | & -2 \\ 0 & -2 & | & 1 \end{bmatrix} \overset{II-I}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & -2 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Lösungsmenge: $L = \{\}$

$\Rightarrow$ Koordinatenursprung nicht in E

Aufgabe 5:

(a) Die Nullfunktion liegt nicht in U, d.h. U kann kein Untervektorraum von $C(\mathbb{R})$ sein.

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ und $\forall f, g \in V$: $(\lambda f + g)(-1) + (\lambda f + g)(1) + (\lambda f + g)(0)$

$= \lambda(f(-1) + f(1) + f(0)) + (g(-1) + g(1) + g(0))$

$\Rightarrow \lambda f + g \in V$

$f \in C(\mathbb{R})$ mit $f(x) = 0$ liegt in V, d.h. $V \neq \{\}$

$\Rightarrow V$ ist Untervektorraum von $C(\mathbb{R})$

Aufgabe 6:

(a) $det(A) = det\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 0$ $\qquad det(B) = det\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -13$

(b) Spaltenvektoren von A sind linear abhängig

(c) Zeilenvektoren von B sind linear unabhängig