Mathematik für Informatiker II
Klausur SS 2001

Vorbemerkung

Diese Klausur wurde von Martin Stephan (http://www.gumbler.de) zur Verfügung gestellt. Damit die Klausursammlung aber immer aktuell bleibt, brauchen wir Deine Mithilfe! Wenn du in einer Klausur noch ein paar Minuten Zeit hast, schreibe doch ein paar Aufgaben ab, damit auch sptere Semester etwas davon haben. Schicke deine Aufschriebe an felix@freitagsrunde.org oder stelle sie selbst in unsere Klausursammlung unter http://wiki.freitagsrunde.org ein. Vielen Dank - deine Freitagsrunde.

Aufgabe 1:

Geben Sie **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

(a) Seien A, U (n,n)-Matrizen und U regulär. Dann gilt $det(U^{-1}AU) = detA$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Für alle $a, b \in \mathbb{R}^n$gilt: $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und A eine singuläre (n,n)-Matrix. Dann besitzt die Gleichung $Ax = 0$ keine Lösung.

(d) Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zwei lineare Abbildungen. Dann ist auch $f \circ g$ linear.

(e) Seien A eine (m,n)-Matrix, $rang(A)$ der Rang von A und $Kern(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \,|Ax = 0\}$ der Kern von A. Dann gilt: $dim(Kern(A)) + rang(A) = n$.

3 Punkte

Aufgabe 2:

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:
Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^n$ vom Nullvektor verschiedene Vektoren, die paarweise orthogonal sind. Dann ist $a_1, ..., a_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$.
Hinweis: Vektoren $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^n$ heißen paarweise orthogonal, wenn das Skalarprodukt $a_k \cdot a_l$ für alle $l \neq k$ gleich Null ist.

3 Punkte

Aufgabe 3:

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ den Kern von A, d.h. die Menge $Kern(A) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$.

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ den Rang $Rg(A)$.

(c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Determinante $det(A)$.

(d) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Anzahl (keine, genau eine bzw. unendlich viele) der Lösungen der Gleichung $Ax = b$.

(e) Bestimmen Sie für $\alpha = -4$ alle (reellen) Eigenwerte von A.

(f) Bestimmen Sie für $\alpha = -4$ und für **einen** Eigenwert von A alle zugehörigen Eigenvektoren.

2+1+1+1+1+1 Punkte

Aufgabe 4:

Im $\mathbb{R}^3$ seien der Punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Gerade $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass P nicht auf der Geraden g liegt.

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E, die sowohl P als auch g enthält.

(c) Bestimmen Sie einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $n \in \mathbb{R}^3$, der senkrecht auf E steht.

(d) Bestimmen Sie die Schnittmenge von g mit der Ebene $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \right\}$.

4 Punkte

Aufgabe 5:

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in C(\mathbb{R})$ linear unabhängig sind.

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^{-x} \quad \text{und} \quad f_3(x) = 1$$

Hinweis: $C(\mathbb{R})$ ist der Vektorraum aller stetigen reellen Funktionen auf $\mathbb{R}$.
„Günstige Zahlen sind zum Beispiel $ln1, ln2$, ... “

3 Punkte

Mathematik für Informatiker II

Musterlösung SS 2001

Aufgabe 1:

(a) wahr

(b) falsch

(c) falsch

(d) wahr

(e) wahr

(f) falsch

Aufgabe 2:

$$
\begin{array}{ll}
\forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}: & \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n = 0 \\
& \Rightarrow \lambda_1 \|a_1\|^2 = (\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n) \cdot a_1 = 0 \\
& \Rightarrow \lambda_2 \|a_2\|^2 = (\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n) \cdot a_2 = 0 \\
& \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& \Rightarrow \lambda_n \|a_n\|^2 = (\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n) \cdot a_n = 0 \\
\text{da alle } a_i \neq 0 & \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0 \\
& \Rightarrow a_1, ..., a_n \text{ sind linear unabhängig} \\
& \Rightarrow a_1, ..., a_n \text{ bilden Basis des } \mathbb{R}^n, \\
& \quad \text{da } n \text{ linear unabhängige Vektoren des } \mathbb{R}^n \text{ stets eine Basis des } \mathbb{R}^n \text{ bilden.}
\end{array}
$$

Aufgabe 3:

$$
Ax = b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & \beta \end{array}\right] \overset{\substack{I \to III \\ III \to II \\ II \to I}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & \beta \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\overset{\substack{II+2I \\ III+\frac{\alpha}{2}I}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & \beta+2 \\ 0 & \alpha & -\frac{\alpha}{2}-2 & \frac{\alpha}{2} \end{array}\right] \overset{III-\frac{\alpha}{5}II}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & \beta+2 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2}-2 & \frac{\alpha}{10}-\frac{\alpha\beta}{5} \end{array}\right]
$$

	$\alpha \neq -4$	$\alpha \neq -4, \beta \neq \frac{1}{2}$	$\alpha = -4, \beta = \frac{1}{2}$
(a) $Kern(A)$	$\{0\}$	$\left\{\left(-\frac{t}{2}, 0, t\right) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$	$\left\{\left(-\frac{t}{2}, 0, t\right) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$
(b) $Rg(A)$	3	2	2
(c) $det(A)$	$5\alpha + 20$	0	0
(d) Lösungen	genau eine	keine	unendlich viele

(e)
$$
\begin{aligned}
0 = det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 & -2 \\ -2 & 2-\lambda & -1 \\ 4 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &\overset{Sarrus}{=} (-4-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) + 4 + 8(2-\lambda) - 4 - \lambda \\
&= (-4-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) + 4 + 16 - 8\lambda - 4 - \lambda \\
&= -\lambda^3 + 12\lambda - 16 + 16 - 8\lambda - \lambda \\
&= \underline{-\lambda^3 + 3\lambda}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte von A sind: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{3}, \lambda_3 = -\sqrt{3}$

(f) Aus (a) folgt, dass die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ folgende sind:
$v \in \left\{\left(-\frac{t}{2}, 0, t\right) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$

Aufgabe 4:

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Da dieses Gleichungssystem keine Lösung $s \in \mathbb{R}$ besitzt, liegt P nicht auf g.

(b) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $n = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d)
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in g\,a\,F &\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
&\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } 1 - s + 2 + s - 1 + s = 1 \\
&\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } s = -1 \\
&\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow g\,a\,F = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5:

$$\begin{aligned}
\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \quad & \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \\
\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \quad & \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0 \\
& \Rightarrow (x = 0) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\
& \Rightarrow (x = ln2) \quad 2\lambda_1 + \tfrac{1}{2}\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\
& \Rightarrow (x = ln\tfrac{1}{2}) \quad \tfrac{1}{2}\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\
& \Rightarrow det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & | & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \overset{Sarrus}{=} \tfrac{3}{4}\,(\neq 0) \\
& \Rightarrow f_1, f_2, f_3 \text{ sind linear unabhängig}
\end{aligned}$$

Auch über $GALG$ lösbar!