Aufgabe 1 (3 Punkte): f1,f2,f3 war gegeben
auf lin. unabhängigkeit prüfen.

SS2004

Aufgabe 2 (4,5 Punkte): Wir betrachten die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & \alpha-2 & 3 & 0 \\ 1 & 5/2 & 5/2 & \alpha \end{pmatrix},$$

die von dem reellen Parameter α abhängt.

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α den Rang $\operatorname{rang}(A_\alpha)$ der Matrix A_α.

(b) Im Folgenden sei $\alpha = 5$. Bestimmen Sie alle Lösungen des homogenen Gleichungssystems $A_5\,x = 0$. Geben Sie eine Basis und die Dimension des zugehörigen Lösungsraumes an.

(c) Es seien $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$. Überprüfen Sie, ob der Vektor v eine Lösung des Gleichungssystems $A_5\,x = b$ ist.

(d) Bestimmen Sie sämtliche Lösungen des Gleichungssystems $A_5\,x = b$ mit dem obigen Vektor b.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Es sei G die Gerade $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass der Punkt $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht auf G liegt.

(b) Es sei E die Ebene, welche die Gerade G und den Punkt P enthält. Zeigen Sie, dass $n = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ senkrecht auf E steht. Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Länge 1 zur Ebene E.

(c) Finden Sie eine Ebenengleichung für E (von der Form $ax + by + cz + d = 0$).

(d) Bestimmen Sie den Abstand der Ebene E vom Koordinatenursprung.

Aufgabe 4 (3 Punkte): Man sagt, zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *kommutieren*, wenn $AB = BA$ gilt. Im Folgenden seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reguläre Matrizen. Beweisen Sie:

(a) Wenn A und B kommutieren, so kommutieren auch A und B^{-1}.

(b) Wenn A und B kommutieren, so kommutieren auch A^{-1} und B^{-1}.

Aufgabe 5 (2,5 Punkte): Es seien A eine reguläre (n,n)-Matrix und $v_1, v_2, \ldots, v_r$ Vektoren aus $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie: Wenn die Vektoren $Av_1, Av_2, \ldots, Av_r$ linear abhängig sind, dann sind auch $v_1, v_2, \ldots, v_r$ linear abhängig.

Aufgabe 6 (3 Punkte): Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante $\det(A)$ mit Hilfe des Entwicklungssatzes durch Entwicklung nach der zweiten Zeile.

(b) Bestimmen Sie die Matrix der Adjunkten $\widetilde{A}$.

(c) Ist die Matrix A regulär? Bestimmen Sie gegebenenfalls A^{-1}.