Klausur

zur Vorlesung „Mathematik für Informatiker II“ SS 2000

27.07.2000

Jürgen Gärtner / Till Tantau, René Dahms

Name: .... **Vorname:** ....

Matrikelnummer: ....

Tutor: ....

Füllen Sie bitte zuerst den Kopf vollständig und leserlich aus. Schreiben Sie auf jedes von Ihnen benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen.
Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt.
Als Hilfsmittel dürfen Sie – wie angekündigt – ein beidseitig handbeschriebenes Blatt der Größe DIN A4 benutzen. Es sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
Mit 10 von 20 Punkten gilt die Klausur als bestanden.

	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Bewertung:								

Punkte: .... Note: ....

Unterschrift des Korrektors: ....

Einsicht und einzige Reklamationsmöglichkeit: Mi., 02.08., 9^{00} – 13^{00} im MA 749.

Aufgabe 1: Geben Sie **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt und für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

(a) $\operatorname{sgn}(1,2,4,3,5,8,7,6) = -1$.

(b) $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2 \quad \Longrightarrow \quad v_1, v_2, v_3$ sind linear abhängig.

(c) $A \in M(n,n)$ ist regulär. $\Longleftrightarrow$ Für alle $b \in \mathbb{R}^n$ ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar.

(d) Für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$ gilt: $|a \cdot b| \leq \|a\| \, \|b\|$.

(e) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Dann gilt für alle (n,n)–Matrizen A, B: $AB = BA$.

(f) Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Für beliebige Vektoren $a, b \in V \setminus \{0\}$ gilt: $\dim L(a,b) = 2$.

3 Punkte

Aufgabe 2: Sei A eine quadratische Matrix. Beweisen Sie:
Ist A regulär, so ist auch die transponierte Matrix A' regulär und $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.
Hierbei dürfen Sie benutzen, daß $(AB)' = B'A'$ für alle $A, B \in M(n,n)$ gilt. **2 Punkte**

Aufgabe 3: Gegeben seien Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ und eine (m,n)–Matrix A. Beweisen Sie:

$$Av_1, Av_2, \ldots, Av_k \quad \text{linear unabhängig} \quad \Longrightarrow \quad v_1, v_2, \ldots, v_k \quad \text{linear unabhängig.}$$

2 Punkte

Aufgabe 4: Seien $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \\ \lambda & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die die Gleichung $Ax = b$ keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen besitzt.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ den Kern von A, d.h. die Menge $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$.

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ den Rang von A.

4 Punkte

Aufgabe 5: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Entwicklungssatzes die Determinante von A.

b) Berechnen Sie die Matrix der Adjunkten $\widetilde{A} = (\alpha_{i,j})$ von A.

c) Berechnen Sie die Inverse von A.

d) Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte von A.

3 Punkte

Aufgabe 6:

Im $\mathbb{R}^3$ seien der Punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und die Gerade $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, daß P nicht auf der Geraden g liegt.

b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E, die sowohl P als auch g enthält.

c) Bestimmen Sie einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $n \in \mathbb{R}^3$, der senkrecht auf E steht.

d) Bestimmen Sie die Schnittmenge von g mit der Ebene $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0 \right\}$.

4 Punkte

Aufgabe 7: Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R})$ linear unabhängig sind:

$$f_1(x) = e^x \quad \text{und} \quad f_2(x) = e^{-x}.$$

2 Punkte