Aufgabe 1 *(4,5 Punkte)*

Bestimme mit dem Gauss'schen Algorithmus, für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 3y + \alpha z &= 6 \\ -x - 2y + (1-\alpha)z &= -1 \\ (1-\alpha)x + (4-3\alpha)y + z &= \alpha + 4 \end{aligned}$$

a) genau eine Lösung hat.

b) keine Lösung hat.

c) unendlich viele Lösungen hat. Gib in diesem Fall die Lösungsmenge an.

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*

Berechne die Determinanten von

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 *(3 Punkte)*

Seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

a) Untersuche, ob $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ linear unabhängig sind. Bilden $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Begründe Deine Antwort!

b) Beantworte die Fragen aus a) für $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

c) Beantworte die Fragen aus a) für $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4$.

Aufgabe 4 *(2 Punkte)*

Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechne, falls möglich, AB^T und BA.

Aufgabe 5 *(1,5 Punkte)*

Sei A eine (3,2)-Matrix.
Zeige, dass $U = \{\vec{y} \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \vec{y} = A\vec{x}\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 6 *(2 Punkte)*

Sei A eine (m,n)-Matrix. Zeige, dass folgendes gilt:
Wenn $Rg(A) = m$ ist, dann ist das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar für alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Aufgabe 7 *(1,5 Punkte)*

Untersuche, ob folgende Abbildungen linear sind. Falls die Abbildung linear ist, gib die dazugehörige Matrix A an, also diejenige Matrix, für die gilt $A\vec{x} = f(\vec{x})$.

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heisst *linear* genau dann, wenn für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$.

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - 1 + 2y - z \\ x - z \\ y + 2 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + z \\ x \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} xy \\ x^2 - y^2 \\ z \end{pmatrix}$.

Aufgabe 8 *(3,5 Punkte)*

Sei $A = \begin{pmatrix} -13 & 6 \\ -35 & 16 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme die Eigenwerte von A und die dazugehörigen Eigenvektoren.

b) Berechne A^{100}.

2

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Berechne die Determinanten von

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: **2,5 Punkte**

2,5

Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

a) Untersuche, ob v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.
b) Bilden v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Warum?

Aufgabe 3: **7 Punkte**

Für $\alpha \in \mathbb{R}$, sei $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & (\alpha+1)^2 & -2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems $A_\alpha x = b$. (mit Begründung)
b) Sei $\alpha = -1$. Bestimme die Dimension des Kerns von A_{-1}.
c) Sei $\alpha = -1$. Bestimme die Lösungsmenge von $A_{-1}x = b$.

Aufgabe 4: **1,5 Punkte**

Seien A und B quadratische Matrizen, wobei A singulär ist.
Zeige: AB ist singulär.

---

5 Punkte
3 x 3
matrix

Aufgabe 5: **2 Punkte**

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Berechne, falls möglich, AB^T, BA und A^{-1}.

Aufgabe 6: **1,5 Punkte**

1 Punkt

Sei $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } y = 2x+1 \right\}$.

a) Untersuche, ob U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ ist.
b) Gib eine Parameterdarstellung von U an.

Aufgabe 7: **2,5 Punkte**

Eigenwerte
berechnen
3

Die (n,n)-Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, und es gelte $A^2 = E$.

a) Zeige: Für die Matrix $D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}_{(n,n)}$ gilt $D^2 = E$.

b) Zeige mit Hilfe des Ergebnisses von a), daß $\lambda_i \in \{-1, 1\}$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

MaT2