1	2	3	4	5	6	7	8	Summe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fachbereich 3 – Mathematik
Deuschel/Niemann/Vrancken

SS 1999
22. 10. 1999

Nachklausur
Mathematik für Informatiker II

Name: **Vorname:**

Matr.–Nr.: **FB:**

Studiengang: Informatik ☐ anderer ☐

Bitte halten Sie Personalausweis oder Reisepass, Studierendenausweis und Laufzettel bereit.

Es sind **keine** Taschenrechner zugelassen. Als sonstiges Hilfsmittel ist nur ein vorher beschriebenes DIN–A–4–Blatt zugelassen.

Die Lösungen sind in Reinschrift mit allen Nebenrechnungen auf DIN–A–4–Blättern abzugeben.

Mit Bleistift, roter oder grüner Farbe geschriebene Klausuren werden **nicht** gewertet.

Alle Lösungen sind zu begründen bzw. ohne Rechenweg wertlos.

Mit 10 von 20 erreichbaren Punkten ist die Klausur bestanden.

Punktzahl: **Note:**

Unterschrift des Assistenten:

Aufgabe 1

(4,5 Punkte)

Bestimme mit dem Gauss'schen Algorithmus, für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + (2-\alpha)z &= 1 \\ 2x + \alpha y &= \alpha \\ 3x + 4y + 5z &= -2 \end{aligned}$$

a) genau eine Lösung hat.

b) keine Lösung hat.

c) unendlich viele Lösungen hat. Gib in diesem Fall die Lösungsmenge an.

Aufgabe 2

(2 Punkte)

Berechne die Determinanten von

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

(3 Punkte)

Seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^4$.

a) Untersuche, ob $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ linear unabhängig sind. Bilden sie eine Basis des $\mathbb{R}^4$? Begründe deine Antwort!

b) Ergänze – falls notwendig – die drei Vektoren mit weiteren, so dass die gesamte Vektorenmenge eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bildet. Zeige, dass deine Wahl eine Basis darstellt!

Aufgabe 4

(2 Punkte)

Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechne, falls möglich, AB, AB^T und BA.

Aufgabe 5

(1,5 Punkte)

Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch

$f(A) := AM - MA$ für alle $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Bestimme den Kern von f. $\quad (Kern(f) = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} | f(A) = 0\})$

Aufgabe 6

(2 Punkte)

Sei A eine (m,n)-Matrix. Welche Eigenschaften muss A haben, damit das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ **genau eine** Lösung besitzt? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 7

(1,5 Punkte)

Untersuche, ob folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume sind.

a) $U_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x\,y\,z = 0\}$,

b) $U_2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 2z, \quad y = -z\}$,

c) $U_3 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 1 = y\}$,

Aufgabe 8

(3,5 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 5 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Bestimme die Eigenwerte von A und die dazugehörigen Eigenvektoren.