Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. Sebastian Riedel

Sommersemester 2014
21. Juli 2014

Klausur
Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Zur Klausur sind Stifte und ein zweiseitig handbeschriebenes A4-Formelblatt zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones etc. dürfen nicht verwendet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** bzw. **eine Begründung** an.

Mit **Bleistift** oder **Rotstift** geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie alle beschriebenen Blätter, auch Schmierzettel und Ihr Formelblatt, ab.

Nicht angemeldete Klausuren gelten als nicht geschrieben und werden nicht korrigiert!

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 50 von 100 Punkten bestanden.

Korrektur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte	10	18	16	18	20	18	100
erreichte Punktzahl							
Unterschrift							—

Klausur Notenschlüssel

“100er Mathe Economics ab 2014”		
1.0	95-100	Sehr gut
1.3	90-94	
1.7	85-89	Gut
2.0	80-84	
2.3	75-79	
2.7	70-74	Befriedigend
3.0	65-69	
3.3	60-64	
3.7	55-59	Ausreichend
4.0	50-54	
5.0	00-49	Mangelhaft

1. Aufgabe

10 Punkte

(i) Finden Sie eine explizite Stammfunktion zu folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = x^7 - 2x^2 + 15, \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$$

Lösung:

$$F_1(x) = \frac{1}{8}x^8 - \frac{2}{3}x^3 + 15x, \quad F_2(x) = -\frac{1}{x} - 2\ln(|x|).$$

(ii) Finden Sie eine explizite Stammfunktion zu der folgenden Funktion:

$$g(x) = 5xe^{2x},$$

Lösung: Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $G(x) = \int_0^x 5ye^{2y}\,dy$ eine Stammfunktion. Mit partieller Integration berechnen wir

$$G(x) = \left[\frac{5}{2}ye^{2y}\right]_0^x - \frac{5}{2}\int_0^x e^{2y}\,dy = \frac{5}{2}xe^{2x} - \left[\frac{5}{4}e^{2y}\right]_0^x = \frac{5}{2}xe^{2x} - \frac{5}{4}e^{2x} + \frac{5}{4}.$$

(iii) Es seien F und G zwei Stammfunktionen zu einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Warum ist dann $(F(x) - G(x))' = 0$?

Lösung: Stammfunktionen sind eindeutig bis auf Addition einer Konstanten, also ist $F(x) - G(x)$ eine konstante Funktion und deren Ableitung ist folglich 0. Alternativ können wir auch die Summenregel der Differentiation sowie die Definition einer Stammfunktion verwenden um zu sehen, dass

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

ist.

(iv) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion

$$h(x) = \int_1^x e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy.$$

Lösung: Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist h eine Stammfunktion der Funktion $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$, d.h. die Ableitung ist gerade $h'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

2. Aufgabe

18 Punkte

(i) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_0^\infty e^{-2x}\,dx, \quad \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Lösung: Es ist

$$\int_0^\infty e^{-2x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-2x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2R}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

und mit der Substitutionsregel ist

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_1^2 e^x\,dx = 2(e^2-e).$$

(ii) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$$

Lösung: Wir bemerken dass $\ln(\cos(x))' = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, also

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\left[\ln(\cos(x))\right]_0^1 = -\ln(\cos(1)).$$

(iii) Bestimmen Sie

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a x\cos(x)\,dx.$$

(*Hinweis: Es gilt* $\sin(-x) = -\sin(x)$ *und* $\cos(-x)=\cos(x)$ *für jedes* $x\in\mathbb{R}$.)

Lösung: Mit partieller Integration sehen wir, dass

$$\int_{-a}^a x\cos(x)\,dx = [x\sin(x)]_{-a}^a + \int_{-a}^a \sin(x)\,dx = a\sin(a)+a\sin(-a)-\cos(-a)+\cos(a) = 0$$

und somit

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a x\cos(x)\,dx = 0.$$

3. Aufgabe

16 Punkte

(i) Bestimmen Sie die ersten Ableitungen zu folgenden Funktionen:

$$f(x) = x^2+1, \quad g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Lösung: $f'(x) = 2x$, $g'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

(ii) Finden Sie zwei gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung mit Anfangsbedingungen, so dass deren Lösung gerade die Funktionen f und g aus Teil (i) sind.

Lösung: Es ist

$$f'(x) = 2x = \frac{2(x^2+1)-2}{x} = \frac{2}{x}f(x) - \frac{2}{x},$$

und $f(0) = 1$, d.h. f löst die DGL

$$f'(x) = \frac{2}{x} f(x) - \frac{2}{x}, \quad f(0) = 1. \tag{1}$$

Weiter ist

$$g'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -xg(x)$$

und $g(0) = 1$, d.h. g löst die DGL

$$g'(x) = -xg(x), \quad g(0) = 1. \tag{2}$$

(iii) Geben Sie an, ob es sich bei den Differentialgleichungen um homogene, inhomogene, separable bzw. lineare DGL handelt.

Lösung: (1) ist linear, inhomogen, nicht separabel, (2) ist linear, homogen und separabel.

4. Aufgabe

18 Punkte

Gegeben sei die folgende Differentialgleichung:

$$y'(t) = \frac{y(t)}{2t}, \qquad y(1) = 10$$

(i) Geben Sie an, ob die Differentialgleichungen homogen, inhomogen, separabel bzw. linear ist.

Lösung: Die Gleichung ist homogen, separabel und linear.

(ii) Lösen Sie die DGL mit einer Methode Ihrer Wahl.

Lösung: Laut dem Satz aus der Vorlesung über homogene lineare Differentialgleichungen ist eine Lösung gegeben durch $y(t) = 10e^{\int_1^t \frac{1}{2s}\, ds}$. Für das Integral gilt

$$\int_1^t \frac{1}{2s}\, ds = \frac{\ln(t)}{2} = \ln(\sqrt{t})$$

und wir erhalten also als Lösung $y(t) = 10\sqrt{t}$.

(iii) Rechnen Sie nach, dass die von Ihnen gefundene Lösung tatsächlich die DGL löst.

Lösung: Es ist $y(1) = 10\sqrt{1} = 10$ und

$$y'(t) = \frac{10}{2\sqrt{t}} = \frac{10\sqrt{t}}{2t} = \frac{y(t)}{2t}$$

5. Aufgabe

20 Punkte

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+2x_2} + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} &= -1 \end{aligned}$$

(i) Bringen Sie das LGS in die Form $A\vec{x} = \vec{b}$ für eine geeignete Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und einen geeigneten Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

Lösung: Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Zeigen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl, dass die Matrix A vollen Rang hat.

Lösung: Wir berechnen die Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -2 + 4 - 3 = -1 \neq 0,$$

also hat die Matrix vollen Rang.

(iii) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS mit Hilfe des Gaußalgorithmus.

Lösung: Die eindeutige Lösung des LGS ist gegeben durch $\vec{x}^t = (1, -2, 0)$.

6. Aufgabe

18 Punkte

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

(i) Berechnen Sie die Determinante der Matrix B.

Lösung: Nach dem Laplace'schen Entwicklungssatz ist

Entwicklung nach 2. Zeile
die anderen Summanden sind 0
absichtlich so gewählt weil dies die
Zeile mit den meisten Nullen ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

wobei die Determinate rechts gleich 0 ist da die Zeilenvektoren linear abhängig sind.

(ii) Sind die Spaltenvektoren der Matrix linear unabhängig? Sind die Zeilenvektoren der Matrix linear unabhängig?

Lösung: Zeilen- und Spaltenvektoren sind linear abhängig. Dies folgt aus einem Satz aus der Vorlesung da die Determinante gleich 0 ist.

(iii) Sei $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$ ein beliebiger Vektor. Betrachten Sie das LGS $B\vec{x} = \vec{b}$. Was können Sie über die Lösungsmenge des LGS sagen?

Lösung: Das LGS hat entweder unendlich viele oder gar keine Lösung.

(iv) Beweisen Sie die folgende Aussage: Sind C und D Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, und gilt $\text{Rang}(C) < n$, dann gilt auch $\text{Rang}(C \cdot D) = \text{Rang}(D \cdot C) < n$ (dabei ist es egal welchen Rang D hat).

(*Hinweis: Benutzen Sie den Zusammenhang zwischen Determinante und Rang einer Matrix sowie den Determinantenmultiplikationssatz, d.h. dass* $\det(C \cdot D) = \det(C) \cdot \det(D)$ *gilt.*)

Lösung: Nach einem Satz aus der Vorlesung hat eine Matrix vollen Rang genau dann wenn die Determinante ungleich 0 ist. Damit folgt, dass $\det(C) = 0$ ist und somit ist auch $\det(C \cdot D) = 0 \cdot \det(D) = 0$. Wenn wir wieder den Satz anwenden erhalten wir, dass das Produkt von C und D nicht vollen Rang haben kann, also $\text{Rang}(C \cdot D) < n$. Das gleiche Argument gilt auch, wenn man die Reihenfolge von C und D vertauscht.