Fragenkatalog zur mündlichen Prüfung Mechanik II / Kinematik und Dynamik

Prof. Popov

Stand: 24.6.2020

Dieser Fragebogen ist ohne Antworten auf der Homepage des Fachbereichs für Reibungsphysik erhältlich.

https://www.reibungsphysik.tu-berlin.de/menue/studium_und_lehre/pruefungen/

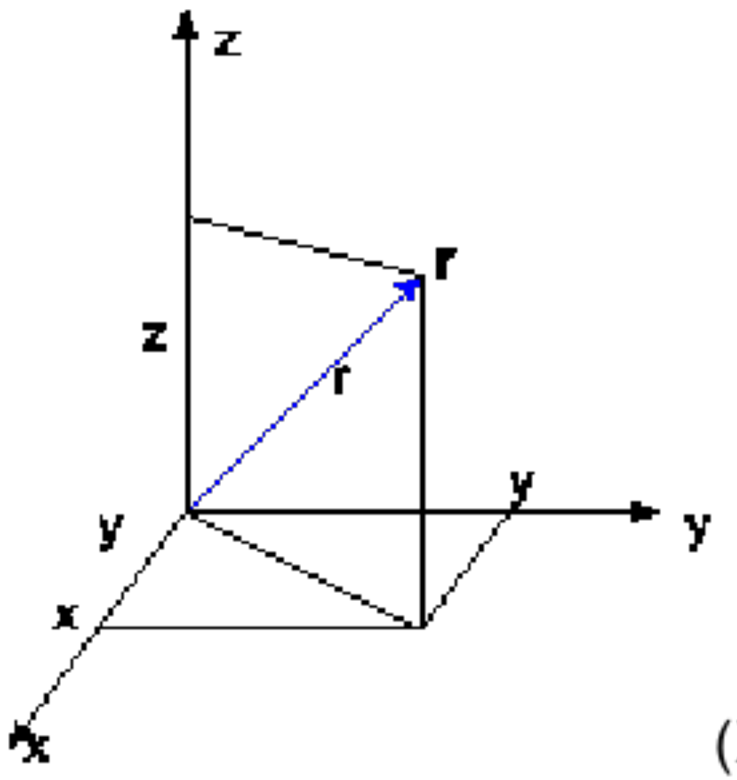
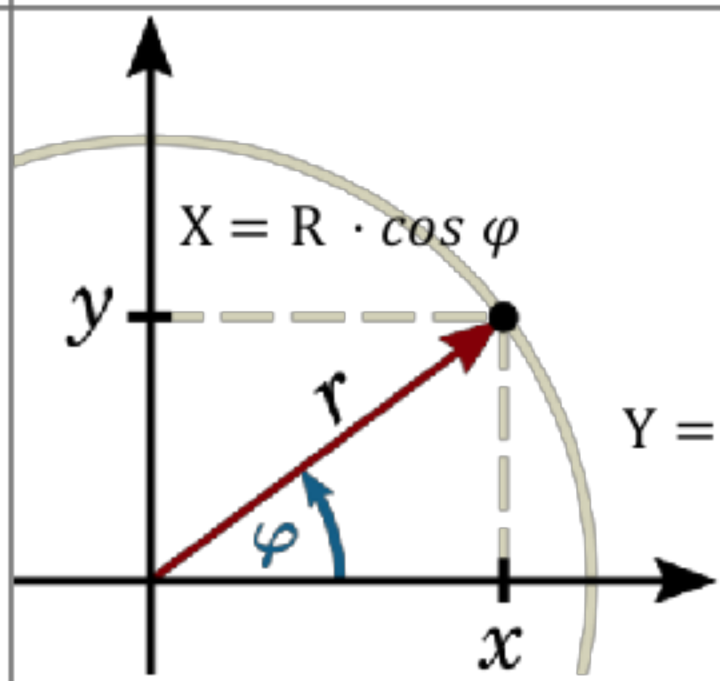
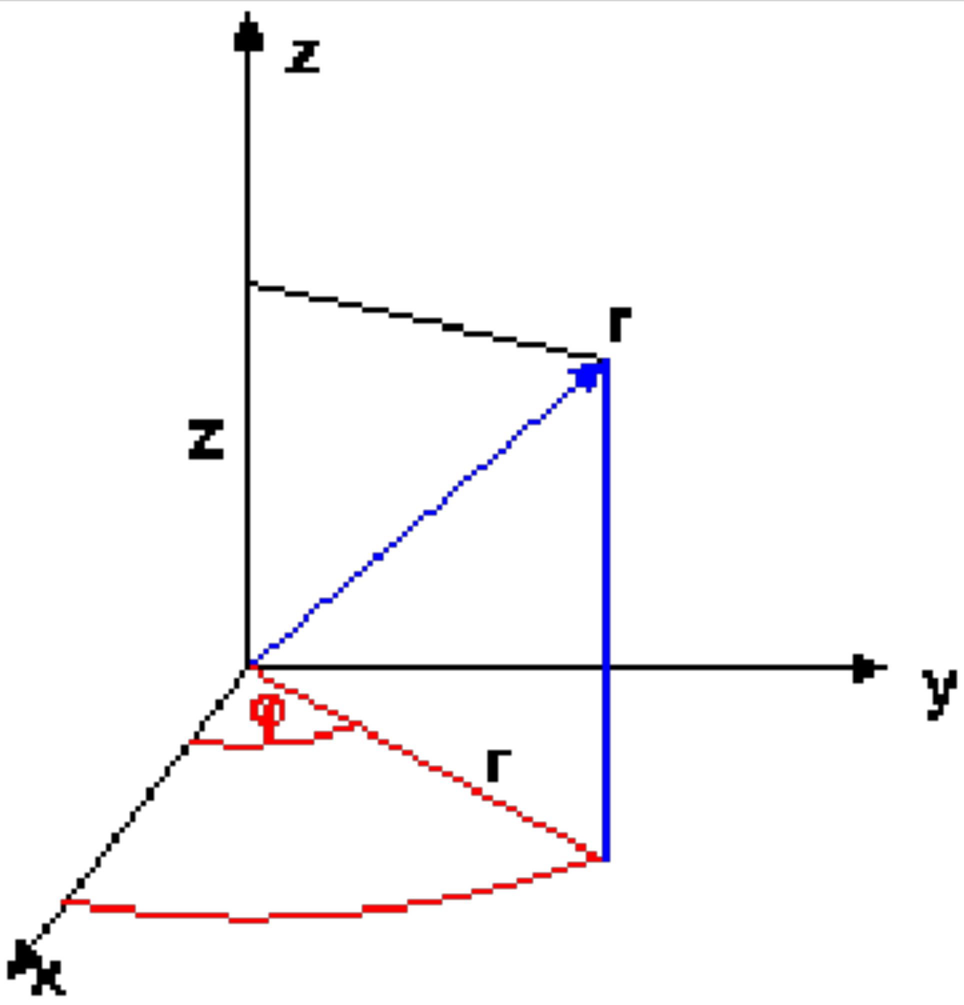
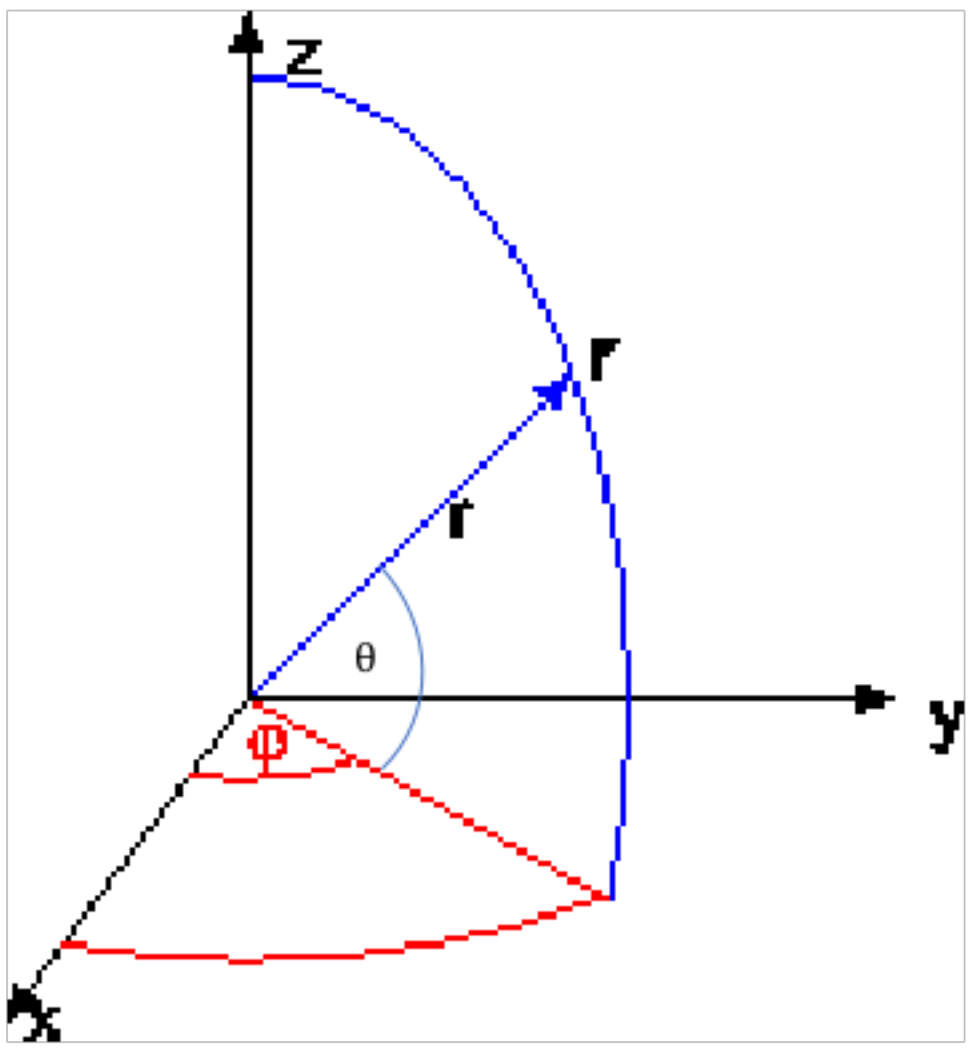
Die Antworten sind von mir (Student im vierten Semester) nach bestem Wissen selbst aus dem Gedächtnis von Vorlesung, Großübung und Tutorien, dem Vorlesungsskript sowie von verschiedeneren Internetquellen zusammengetragen.

Die Antworten erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Richtigkeit!

Ich habe mit viel Aufwand einen ähnlichen ausgefüllten Fragebogen für die gleiche Prüfung im Internet hinter einer Paywall gefunden. Die darin enthaltenen Antworten waren teils haarsträubend falsch. Deshalb habe ich mich an eine eigene Version gemacht. Hatte einen sehr guten Lerneffekt.

Punktkinematik

1. Wie viele Freiheitsgrade hat ein Punkt im Raum?
    - 3 Translatorische, keine rotatorischen!
2. Was ist ein kartesisches Koordinatensystem, was ein Polarkoordinatensystem, ein Zylinderkoordinatensystem, ein Kugelkoordinatensystem?

Kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten
 (X, Y, Z)	$X = R \cdot \cos\varphi$  $Y = R \cdot \sin\varphi$ $R = \sqrt{(x^2+y^2)}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
Zylinderkoordinaten	**Kugelkoordinaten**
 $X = R \cdot \cos\varphi, Y = R \cdot \sin\varphi, Z = Z$ $R = \sqrt{(x^2+y^2)}, \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	 $X = r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi,$ $Y = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi$ $Z = \sin\theta$

3. Was ist Geschwindigkeit, was ist Beschleunigung, was ist Winkelgeschwindigkeit?

- Geschwindigkeit ist die zeitliche Ableitung des Ortsvektors $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$
- Beschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit $\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \vec{a}$
- Winkelgeschwindigkeit ist analog die zeitliche Ableitung des polaren Winkels $\dot{\vec{\varphi}} = \omega$

4. Was ist Bahnbeschleunigung? Was ist Zentripetalbeschleunigung?

- Bahnbeschleunigung ist die Ableitung der Bahngeschwindigkeit. Diese besteht aus zwei Komponenten, die Zentripetalbeschleunigung ist die zentral gerichtete Komponente.

$$\vec{v} = \mathrm{r} \cdot \dot{\varphi} \longrightarrow \vec{a} = \boxed{-\mathrm{r}\dot{\varphi}^2\overrightarrow{e_r}} + \mathrm{r}\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}(t)$$

5. Leiten Sie die Formel für die Zentripetalbeschleunigung her.

- Auf einer Kreisbahn ist

$$\vec{r}(t) = \mathrm{r}(t)\overrightarrow{e_r}(t) \text{ und } \vec{r}(t) = \text{const} \longrightarrow \dot{\vec{r}} = 0 \text{ und } \ddot{\vec{r}} = 0$$

- Die Ableitung des Ortsvektors mit der Produktregel ergibt die Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t)\overrightarrow{e_r}(t) + \mathrm{r}(t)\dot{\overrightarrow{e_r}}(t)$$

Mit $\dot{\overrightarrow{e_r}} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$ und $\dot{\vec{r}} = 0$ folgt

$$\vec{v}(t) = 0(t)\overrightarrow{e_r}(t) + \mathrm{r}(t)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}(t)$$

- Die Ableitung der Geschwindigkeit ergibt die Beschleunigung:

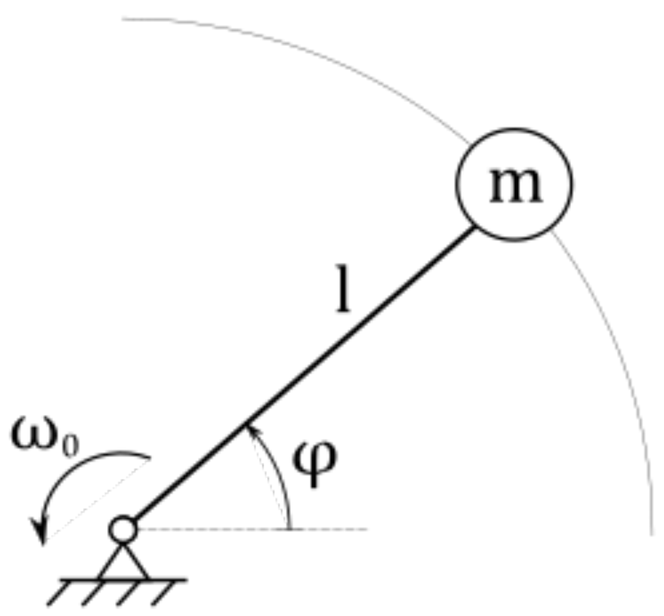
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{r}(t)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}(t) + r(t)\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}(t) + r(t)\dot{\varphi}\dot{\overrightarrow{e_\varphi}}(t)$$

Mit $\dot{\overrightarrow{e_\varphi}} = -\dot{\varphi}\overrightarrow{e_r}$ und $\dot{\vec{r}} = 0$ folgt:

$$\vec{a} = \mathrm{r}(t)\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}(t) - \mathrm{r}(t)\dot{\varphi}^2\overrightarrow{e_r}(t)$$

Anmerkung: In meiner Prüfung wurde die vollständige Ableitung gefragt, ohne die Annahme $\vec{r}(t) = \text{const}$.

6. Wie ergeben sich Bahn- und Zentripetalbeschleunigung für das folgende Beispiel?



- Bahnbeschleunigung: $\overrightarrow{a_\varphi} = \mathrm{r}(t)\ddot{\varphi} = \mathrm{l}\dot{\omega}$
- Zentripetalbeschleunigung: $\overrightarrow{a_r} = -\mathrm{r}\omega^2 = -\mathrm{l}\omega^2$

7. Wie bestimmt man bei gegebener Koordinate als Funktion der Zeit die Geschwindigkeit und die Beschleunigung?

   - Wenn $\vec{r}(t)$gegeben ist, so ist $\dot{\vec{r}}(t)$ die Geschwindigkeit und $\ddot{\vec{r}}(t)$ die Beschleunigung

8. Wie bestimmt man bei der gegebenen Beschleunigung als Funktion der Zeit die Geschwindigkeit und die Koordinate?

   - Wenn $\vec{a}$ gegeben ist, bestimmt man die Geschwindigkeit als $\vec{v} = \int \vec{a}\,\mathrm{dt}$ und den Ortsvektor als $\vec{r} = \int \vec{v}\ \mathrm{dt}$

9. Wie bestimmt man bei der gegebenen Beschleunigung als Funktion der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit und die Koordinate?

   - Wenn $a(v)$ gegeben ist, kann mit dem Zusammenhang

     $a = \frac{dv}{dt}$ und $a = a(v)$ die Gleichung aufgestellt werden:

$$a(v) = \frac{dv}{dt} \xrightarrow{TdV} dt = \frac{dv}{a(v)}$$

$$\int_{t_0}^{t} dt = \int_{v_0}^{v} \frac{1}{a(v)}\ dv$$

$$t - t_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{1}{a(v)}\ dv \longrightarrow t = t_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{1}{a(v)}\ dv$$

   - Mit der gleichen Methode wird nun v nach t integriert.

$$v = \frac{dr}{dt} \xrightarrow{TdV} dr = v \cdot dt$$

$$r - r_0 = \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

Kinematik des starren Körpers

10. Wie viele Freiheitsgrade hat ein starrer Körper?

    - 6: 3 translatorische und 3 rotatorische Freiheitsgrade

11. Welche Bewegungsarten kann ein starrer Körper ausführen?

    - Rotation
    - Translation

12. Was ist der Vektor der Winkelgeschwindigkeit?

    - Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit stellt die Rotationsachse da und steht senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor.

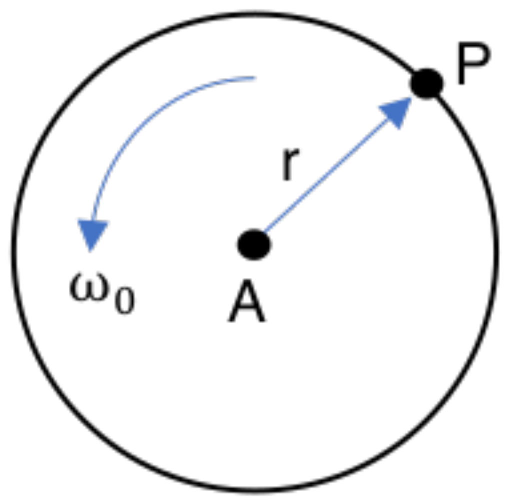
$$\vec{\omega} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\vec{e_r} + \mathrm{r}\dot{\vec{e_r}}$$

$\dot{r}\vec{e_r} = 0$ da es sich um einen starren Körper handelt, ist $r(t)$ konstant!

$$\vec{\omega} = \mathrm{r}\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$$

13. Wie lautet die Eulersche Geschwindigkeitsformel?

    - $\vec{v_P} = \vec{v_A} + w_0 \times \vec{r_{AP}}$



14. Was ist die ebene Bewegung eines starren Körpers?

    - Ist eine Bewegung, bei der sich jeder Punkt eines starren Körpers in einer Ebene bewegt.

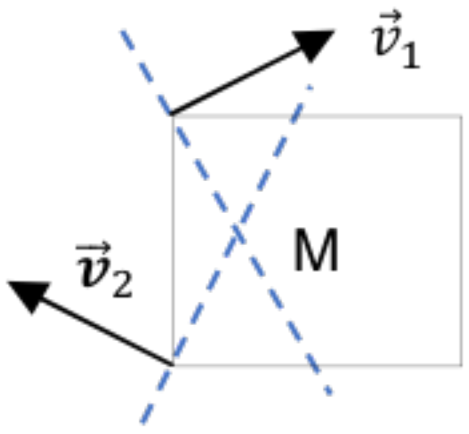
15. Was ist die momentane Drehachse?

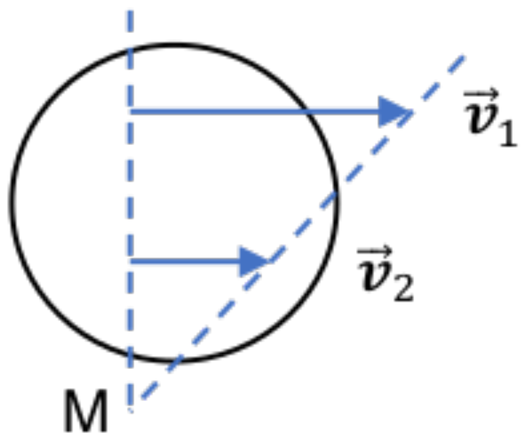
    - Die momentane Drehachse oder auch Momentanpol ist der Punkt, um den der Körper gerade rotiert und an dem deshalb die Geschwindigkeit $\vec{v} = 0$ ist.

16. Eine beliebige Bewegung eines starren Körpers kann als eine Translation und eine darauffolgende Rotation bezüglich eines Bezugspunktes dargestellt werden. Hängen die Translationsbewegung und der Drehwinkel eines starren Körpers von der Wahl des Bezugspunktes ab?

    - Nein, solange der Beobachtungspunkt in einem Inertialsystem liegt. Denn für die Beschreibung der Translation nur der Differenzvektor zweier Punkte benötigt wird, sowie der Rotationswinkel zur Beschreibung der Rotation. Die Wahl des Beobachtungspunktes spielt dabei höchstens messtechnisch eine Rolle.

17. Finden Sie den Momentanpol für das folgende System.



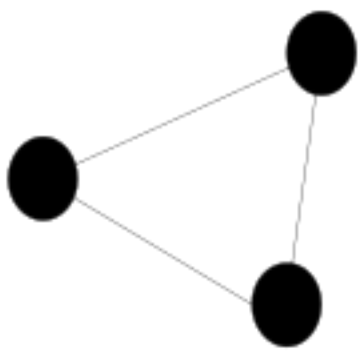


- Als Schnittpunkt der Normalen durch die Anfänge der Vektoren.
- Als Schnittpunkt der Geraden durch Anfänge und Enden der Vektoren.

18. Bestimmen Sie die Freiheitsgrade f des folgenden Systems

Wie viele Koordinaten können Sie aufstellen?

Wie viele kinematische Beziehungen benötigen Sie?



- Anzahl der Koordinaten: $n = 3$
- Anzahl der kinematischen Beziehungen $r = 3$
- $f = 3n - r = 3 \cdot 3 - 3 = 6$

Newtonsche Gesetze

19. Formulieren sie die drei Newtonschen Gesetze.

- Trägheit: Ein Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, solange die Summe aller auf ihn einwirkenden Kräfte Null ist $\sum \vec{F}^{\mathrm{ext}} = 0$.

  (Wenn auf einen Massenpunkt keine Kraft wirkt, so ist sein Impuls konstant.

  $\vec{p} = \mathrm{m}\vec{v} = \mathrm{const.}$)
- Aktion: Masse mal Beschleunigung = Kraft bzw. $\mathrm{m} \cdot \vec{a} = \vec{F}$
- Reaktion: Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleichgroße, aber entgegengerichtete Kraft von B auf A (reactio) $\mathrm{actio} = \mathrm{reactio}$.

20. Welche Gleichung wird als „Bewegungsgleichung“ bezeichnet?

- Das 2. N.G. kann als $\mathrm{m} \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ geschrieben werden und heißt dann Bewegungsgleichung.

21. Was ist das Trägheitsmaß von Körpern bei translatorischer Bewegung?

- Die Masse m des Körpers ist das Maß seiner Trägheit.

22. Was ist ein Inertialsystem?

- Ein Inertialsystem ist ein ruhendes bzw. gleichförmig bewegtes Bezugssystem.

23. Wie werden die Integrationskonstanten bei Integration von Bewegungsdifferentialgleichungen bestimmt?

- Die Integrationskonstanten werden durch auswerten der Anfangsbedingungen bestimmt. z.B. $x_0 = 5\mathrm{m}, v_0 = 0\,\frac{m}{s}$

24. Formulieren Sie die Gesetze für den freien Fall von Körpern.

- Der freie Fall ist eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Laut Definition ist er Reibungsfrei und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$. Mit nach unten ZeigenderKoordinatenachse $h_0 = 0$.
- Bewegungsgesetz: $\cancel{m}\ddot{h} = \cancel{m}g \mid m\, kürzen, integrieren\, nach\, t$

$$\dot{h} = gt + \cancel{v_0}$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + \cancel{v_0} + \cancel{h_0}$$

Aus der Fallhöhe $h = \frac{1}{2}gt^2$ kann durch Umstellen die Fallzeit ermittelt werden $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Mit der Fallzeit kann nun die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t ermittelt werden.

$$v = gt \mid mit\; t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v = g\sqrt{\frac{2h}{g}} \;|(\cdot)^2$$

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{g}^{\cancel{2}}\frac{2h}{\cancel{g}} \;|\sqrt{(\cdot)}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

25. Nach welchen Gesetzen verläuft die horizontale und die vertikale Bewegung eines Körpers beim schiefen Wurf? Auf welcher Bahn bewegt er sich? Bei welchem Wurfwinkel ist die Flugweite am größten?

- Lässt sich in zwei unabhängige Komponenten aufteilen:
  - Horizontal: gleichförmig bewegt $\mathrm{m}\ddot{x} = 0$
  - Vertikal: gleichförmig beschleunigt $\mathrm{m}\ddot{z} = -\mathrm{mg}$
- Die Bahn ist parabelförmig $y(s) = s \cdot tan\,\varphi - \frac{gs^2}{2v_0^2 \cdot cos^2\,\varphi}$
- Die maximale Weite bei $s = \frac{v_0^2}{g} \cdot sin(2\varphi)$ einem

  Abwurfwinkel im Winkel von $45°$, denn sin wird bei $90°$ maximal.

26. Welche Kräfte kennen Sie?

- Kraft ist die Fähigkeit eine Bewegung zu ändern.
    - Gravitationskraft
    - Widerstandskraft turbulent & laminar
    - Kraft ist die Fähigkeit eine Bewegung zu ändern.
    - Federkraft
    - Auftriebskraft
    - Reibkraft (nicht konservativ)
    - Scheinkräfte: Coriolis- & Zentrifugalkraft
    - Reaktionskräfte (Zwangskräfte)

27. Was sind Zwangskräfte und was sind eingeprägte Kräfte? Nennen Sie Beispiele.

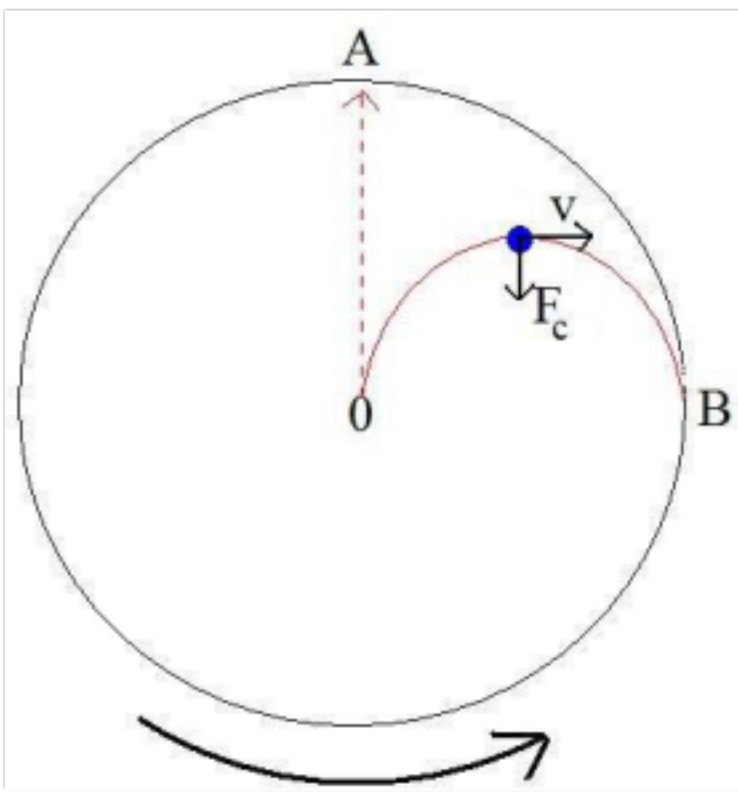
- Zwangskräfte bzw. Reaktionskräfte entstehen durch Einschränkung von Bewegungen eines Körpers, z.B. Lagerreaktionskraft.
- Eingeprägte Kräfte sind physikalisch vorgegeben, z.B. Gewichtskraft oder Luftwiederstand.

28. Was sind Widerstandskräfte? Welche Widerstandskräfte kennen Sie?

- Widerstandskräfte sind Kräfte, die aus Bewegung resultieren und die Bewegungen hemmen. Sie sind entgegen der Bewegungsrichtung gerichtet.
- Reibung, turbulente & laminare Widerstandskraft

29. Welchen Betrag und welche Richtung haben die Coriolis- und die Zentrifugalkraft?

- Die Corioliskraft ist eine Scheinkraft die nur in einem rotierenden Bezugssystem auftritt. Ihre Richtung $\overrightarrow{F_c} = 2\mathrm{m}(\vec{v} \times \vec{\omega})$ ist $\perp$ zur Rotationsachse und $\perp$ zur Bewegungsrichtung. Ihr Betrag ist $|F_C| = 2\mathrm{mv}\omega \cdot \sin(\theta)$ mit $\theta = \angle(\vec{v}, \vec{\omega})$ (der Breitengrad)
  F_C ist am Äquator am größten.



- Zentrifugalkraft: $|\vec{F}_{zentrif.}| = \mathrm{mr}\omega^2$ wirkt radial von der Rotationsachse nach außen.

30. Worin besteht das Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik?

- Das Prinzip besagt, dass die Gesetze der Mechanik in allen Bezugssystemen gelten, die sich gleichförmig zum absoluten Raum bewegen. D.h. in allen Inertialsystemen ($v = konstant$).

31. An welchen Orten auf der Erdoberfläche hat die Gewichtskraft den maximalen und den minimalen Wert?

- Je größer der Abstand zum Massemittelpunkt der Erde, desto kleiner ist die Gewichtskraft.

$$\overrightarrow{F_G} = \mathrm{G}\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

  - Polregion $\mathrm{g} \approx 9{,}83\frac{m}{s^2}$ ⟶ große Gewichtskraft (ca. -25km)
  - Berggipfel in den Nord-Anden $\mathrm{g} \approx 9{,}76\frac{m}{s^2}$ ⟶ kleine Gewichtskraft

32. Warum werden fallende Körper nach Osten abgelenkt?

- Fallende Objekte werden aufgrund der Corioliskraft nach Osten abgelenkt. Diese wirkt ⊥ zur Rotationsachse und ⊥ zur Relativbewegung ⟶ Ablenkung nach Osten aufgrund der Rotation Richtung Westen. Dieser Effekt ist am Äquator am stärksten.

Impulssatz

33. Was sind innere und äußere Kräfte?

- Innere Kräfte sind Kräfte zwischen den einzelnen Massepunkten eines Systems. Ihre Wirkungslinieren laufen durch die Massepunkte weshalb $F_1 = F_2$ ist.
- Äußere Kräfte sind Kräfte, die von außerhalb des Systems auf das System wirken, z.B. eingeprägte Kräfte (Gewicht) oder Zwangskräfte (Lagerreaktionskräfte) sein.

34. Was ist der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten, und wie werden seine Koordinaten berechnet?

- Der Schwerpunkt eines Systems ist dessen Massenmittelpunkt.

$$\vec{s} = \frac{\sum \vec{r_i} m_i}{\sum m_i}, bzw. koordinatenweise: x_s = \frac{\sum x_i \, m_i}{\sum m_i}$$

35. Formulieren Sie den Schwerpunktsatz.

- Der Schwerpunkt eines Systems bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angreifen.

36. Welche Bewegung eines starren Körpers kann man als Bewegung eines Massenpunkts mit der Masse des Körpers betrachten? Warum?

- Wenn eine Kraft auf den Schwerpunkt eines Körpers ausgeübt wird, führt dieser nur translatorische Bewegungen aus, da der Hebelarm stets null ist und somit keine Winkelbeschleunigung möglich ist.

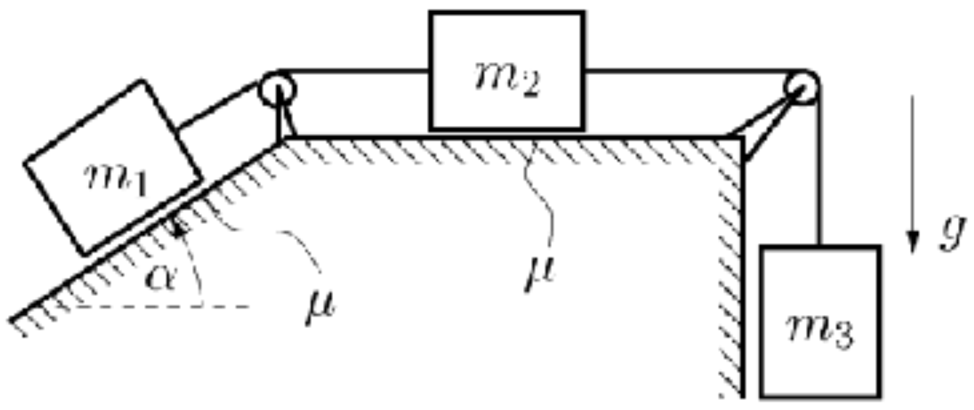
  ⟶ Massepunkte können nur translatorische Bewegungen ausführen, jedoch keine rotatorischen, da Punkte keine rotatorischen Freiheitsgrade besitzen!

- Beispiel: Bewegung des Mondes um die Erde, jedoch nicht die Rotation der Erde um sich selbst.

37. Unter welchen Bedingungen bleibt der Schwerpunkt eines Systems in Ruhe, und unter welchen Bedingungen bewegt er sich gleichförmig und geradlinig?

- Nach dem 1.N.G., dem Trägheitsprinzip verharrt der Massenmittelpunkt in Ruhe oder in einer gleichförmigen Bewegung, wenn $\sum \vec{F_i}^{ext} = 0$ ist.

38. Geben Sie Beispiele für den Schwerpunktsatz. Zeigen Sie die Anwendung des Schwerpunktsatzes an dem folgenden System.



- Beispiel: Wenn eine Rakete im Weltraum durch Rückstoß beschleunigt, so bleibt der gemeinsame Schwerpunkt von Rakete und ausgestoßener Masse in Ruhe.
- Bei diesem System können alle Massen als Punkte angenommen werden, da nur die Reib- und Gewichtskräfte für das Gleichgewicht relevant sind. Darüber hinaus muss die Gewichtskraft von m_3 so gewählt werden, dass sie gleich der Summer der übrigen Kräfte ist, damit das System in Ruhe bleibt. $(G_3 = F_{R2} + F_{R1} + G_1 sin)$

39. Wie definiert man Impuls?

- $\vec{p} = \mathrm{m}\vec{v} \longrightarrow \vec{p} = \sum m_i \vec{v_i}$ Puls ist Masse mal Geschwindigkeit.

40. Was ist ein Kraftstoß?

- Der Kraftstoß ist die Änderung des Impulses $\hat{F} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

41. Formulieren Sie den Impulssatz in der Differential- und Integralform.

- Differenzial

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = \mathrm{m}\vec{a}$$

- Integral

$$\int_{\vec{p_1}}^{\vec{p_2}} d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{dt} = \hat{F}$$

42. Wie groß ist der Impuls eines Schwungrades, das sich um eine unbewegte, über den Schwerpunkt gehende Achse dreht?

- $\mathrm{L} = \mathrm{mr}^2\omega = \Theta\omega$ mit $\omega = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{r}}$ und $\Theta = \mathrm{mr}^2$ Massenträgheitsmoment

43. Unter welchen Bedingungen ändert sich der Impuls eines mechanischen Systems nicht? Unter welchen Bedingungen ändert sich die Projektion des Impulses auf eine gegebene Achse nicht?

- Der Puls ändert sich nicht, wenn $\sum \vec{F}^{ext} = 0$ ist.
- Wenn die Projektion der Äußeren Kräfte auf eine Achse Null ist, so ändert sich auch die Projektion des Pulses auf diese Achse nicht.

  $\sum F_x = 0 \longrightarrow p_x = konstant.$ (Teilerhaltung)

  Die Kräftesumme kann aber z.B. $y \neq 0$ sein, dann kann sich die Richtung des Pulses ändern.

44. Was ist ein Rückstoß? Geben Sie Beispiele für den Rückstoß an.

- Der Rückstoß (3.N.G. actio = reactio) ist eine Gegenreaktion, die durch Masseausstoß erzeugt wird. Dir Richtung des Rückstoßes ist entgegengesetzt der Richtung der Beschleunigung der Auswurfmasse.
- Beispiel: In einem (reibungsfreien) Ruderboot sitzen und Steine in eine Richtung aus dem Boot werfen.

45. Können innere Kräfte den Impuls des gesamten Systems ändern? Und den eines Teils davon?

- Innere Kräfte wirken zwischen den einzelnen Teilen eines Systems. Nach dem 3.N.G. (actio = reactio) treten sie wechselseitig auf, so dass ihre Summe stets 0 ist. Deshalb können sie den Gesamtimpuls eines Systems nicht ändern.

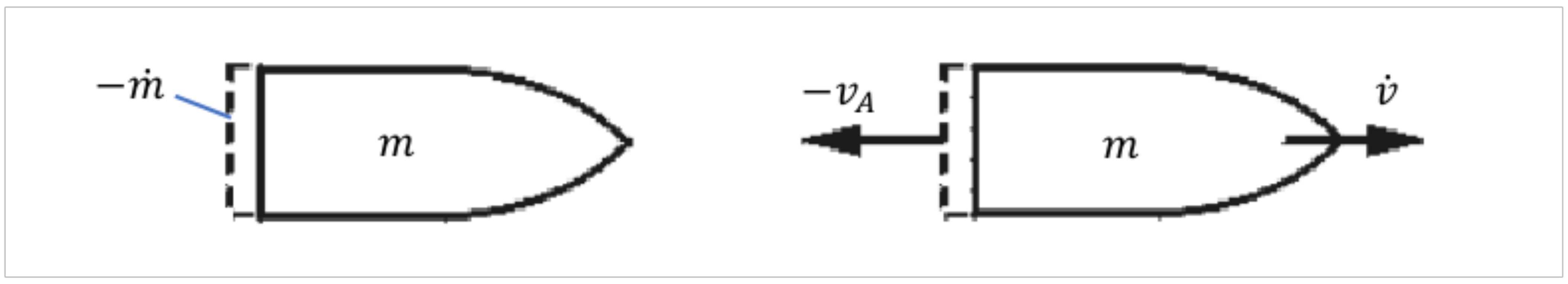
46. Was ist ein Körper mit veränderlicher Masse?

- Körper mit Veränderlicher Masse können durch Verbrennungskraftmaschinen getriebene Fahrzeuge sein. Ihre Masse nimmt mit der Zeit durch den Verlust von Kraftstoff ab.

47. Wie sieht die Bewegungsgleichung für einen Körper mit veränderlicher Masse aus?

- $wenn\ M = konstant \longrightarrow \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{p}}}{\mathrm{dt}} = m\ddot{\vec{r}}$
- $wenn\ M \neq konstant \longrightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{\mathrm{v}}) = \dot{m}\vec{v} + m\dot{\vec{v}}$

48. Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für eine Rakete auf und integrieren Sie diese Gleichung.



- Restmasse der Rakete: m

  Ausstoßmasse: $-\dot{m}$

  Geschwindigkeit der Rakete: $\dot{v}$

  Ausstoßgeschwindigkeit: $-\vec{v}_A = konstant$

- Abgeschlossenes System, die Impulserhaltung fordert:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \stackrel{!}{=} 0 = \mathrm{m} \cdot \vec{\mathrm{v}} - \vec{v}_A \cdot (-\dot{m})$$

$$\mathrm{m} \cdot \dot{\vec{\mathrm{v}}} = \ -\vec{v}_A \cdot \dot{m} \,|: m$$

$$\frac{d\vec{v}}{\cancel{dt}} = -\vec{v}_A \frac{dm}{m \cdot \cancel{dt}}$$

$$d\vec{v} = -\vec{v}_A \ \frac{dm}{m} |\ Integrieren$$

$$\vec{v} = -\vec{v}_A \int_{m_0}^{m} \frac{1}{m} dm$$

$$\vec{v} = -\vec{v}_A \cdot [ln(m)]_{m_0}^{m}$$

Ziolkowski-Gleichung: $$\vec{v} = -\vec{v}_A \cdot ln \frac{m}{m_0}$$

Drehimpulssatz

49. Was ist das Trägheitsmoment eines starren Körpers bezüglich einer Achse?

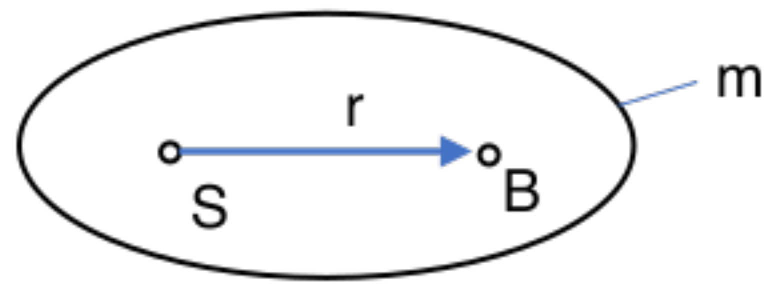
- Das Trägheitsmoment, auch Massenträgheitsmoment, ist eine physikalische Größe, die in der Mechanik die Trägheit eines starren Körpers gegenüber einer Änderung seiner Rotationsbewegung angibt.

50. Welche Einheit hat das Trägheitsmoment?

- Trägheitsmoment: $\Theta = mr^2$ mit der Einheit $[\Theta] = kgm^2$

51. In welchem Zusammenhang stehen Trägheitsmomente eines Körpers bezüglich zweier paralleler Achsen (Satz von Steiner)?

- Satz von Steiner $\Theta_B = \Theta_S + mr^2$
Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes plus Masse mal Abstand zum Punkt B im Quadrat.



52. Wie berechnet man das Trägheitsmoment eines starren Körpers bezüglich einer beliebigen Achse?

- $\Theta_x = \sum m_i x_i^2 , \Theta_y = \sum m_i y_i^2 , \Theta_z = \sum m_i z_i^2$

  $\Theta_{ges} = \Theta_x + \Theta_y + \Theta_z$

- Mit Hilfe des Trägheitstensors und dem Satz von Steiner lassen sich die Trägheitsmomente um beliebige Achsen errechnen.

53. Was sind Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente eines starren Körpers?

- Hauptträgheitsachsen sind die Achsen, um die ein Körper ohne Unwucht rotieren kann. Auf diesen Achsen werden die zugehörigen Trägheitsmomente maximal.

- Trägheitstensor $\Theta_{ik} = \begin{bmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{bmatrix}$

  Auf der Hauptdiagonale sind die Hauptträgheitsachsen, die Übrigen Werte sind die Deviationsmomente.

55. Wie definiert man den Drehimpuls (Drall)?

- Der Drehimpuls oder Drall ist definiert als Vektor welcher senkrecht auf der Drehbewegung $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ und gibt die Richtung und Geschwindigkeit einer Drehbewegung an. Der Drehimplus kann auch durch Einführung von Polarkoordinaten in der Rotationsebene beschrieben: $L = mr^2\dot{\varphi}$.

56. Bei welcher Lage des Impulses eines Massenpunktes ist sein Drehimpuls bezüglich einer Achse gleich Null?

- Wenn ein Massepunkt genau auf der Rotationsachse liegt ist sein Hebelarm bezüglich dieser = null, denn $\vec{L} = \vec{0} \times \mathrm{m}\vec{v} = 0$. Oder $\vec{v} = 0$.

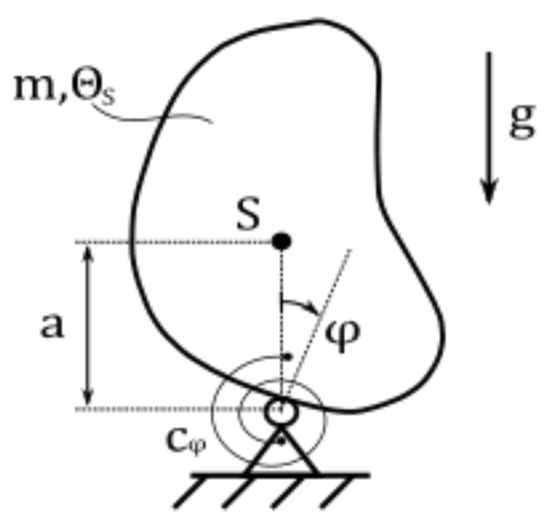
57. Formulieren Sie den Drehimpulssatz (Drallsatz).

- Der Drehimpuls ist das Kreuzprodukt von Ort und Impuls und beschreibt eine Drehbewegung. Die zeitliche Ableitung des Drehimpulses ist in Bezug auf einen raumfesten Punkt gleich dem Moment am Massepunkt angreifenden Kraft bezüglich dieses Punktes $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$. Herleitung:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}\,) = \left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right) \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\left(\frac{d}{dt}\vec{v}\right)$$

$$= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = 0 + \vec{M}$$

58. Zeigen Sie die Anwendung des Drehimpulssatzes (Drallsatzes) an dem folgenden System.



- $\sum \overrightarrow{\mathrm{M_A}} \overset{!}{=} 0$
- $\mathrm{M_F} = \mathrm{c} \cdot \varphi$
- $\mathrm{M_A} = \dot{\mathrm{L}}$ mit $\vec{L}_A = \Theta_\mathrm{A} \cdot \dot{\varphi}$ und $\Theta_\mathrm{A} = \Theta_\mathrm{S} + \mathrm{ma}^2$

59. Warum liegt die Bahn eines Planeten in einer Ebene?

- Die Bewegung eines Planeten um sein Zentralgestirn folgt dem 1.N.G. Trägheitsprinzip. Es gibt nur den Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ welcher die Rotation in einer Ebene, welche von $\vec{\omega}$ und $\vec{r}$ aufgespannt wird, beschreibt. Es gibt keine äußeren Kräfte, welche den Drehimpuls stören.

60. Unter welchen Bedingungen ändert sich der Drehimpuls eines Körpers bezüglich einer Achse nicht?

- Solange kein äußeres Moment senkrecht zur Drehachse aufgebracht wird (Präzession)

Energie, Arbeitssatz

60. Wie definiert man die Arbeit einer konstanten Kraft bei einer gradlinigen Bewegung?

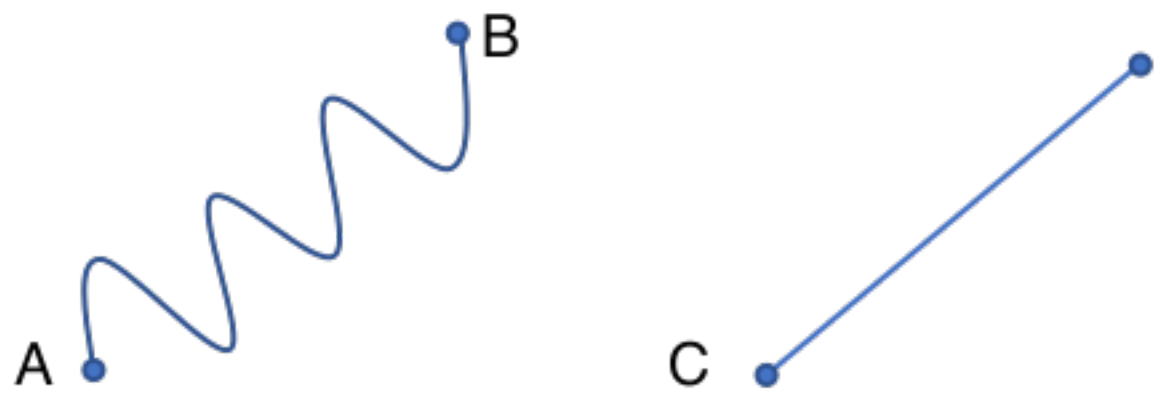
- Arbeit ist als Integral der Kraft über einen Weg definiert.

$$W = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Bei $F = konstant$ gilt: $W = \vec{F}(\vec{r_2} - \vec{r_1}) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$.

61. Wie kann man die Arbeit einer (nach Betrag und Richtung) konstanten Kraft bei einer krummlinigen Bewegung berechnen?

- Da die Form des Weges bei der Berechnung der Arbeit keine Rolle spielt, ist bei $\vec{F} = konstant$ die Arbeit $W = \vec{F}(\vec{r_2} - \vec{r_1})$.

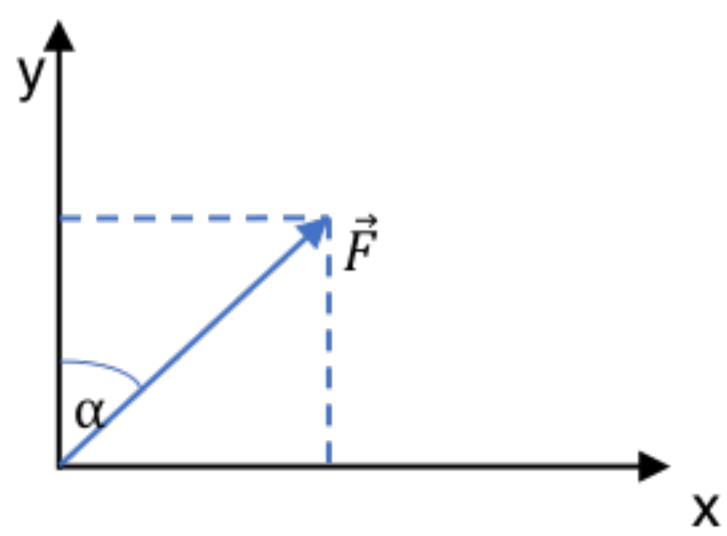


$W_{AB} = W_{CD}$

62. Geben Sie eine Definition der Arbeit in Vektorform.

- $\vec{W} = \vec{F} \times \vec{r} \longrightarrow |\vec{W}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot cos\sphericalangle(\vec{F}, \vec{r})$

63. Wie kann die Arbeit durch Projektionen der Kraft und der Verschiebung auf Koordinatenachsen ausgedrückt werden?



- Wirkt die Kraft nicht parallel zur Bewegungsrichtung, kann die in Komponenten (x, y) aufgeteilt werden.
- $F_x = |\vec{F}| \cdot sin\,\alpha$

64. Formulieren Sie den Arbeitssatz.

- Die Arbeit, die durch eine einwirkende Kraft $\vec{F}$ an einem Objekt geleistet wird, entspricht der Änderung der kinetischen Energie ΔE_{kin} dieses Objektes.
- Die Herleitung erfolgt über das 2.N.G.

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = F \mid \cdot\, d\vec{s}$ mit $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \Longrightarrow d\vec{s} = \vec{v} \cdot dt$

$m\frac{d\vec{v}}{\cancel{dt}}\vec{v} \cdot \cancel{dt} = F \cdot d\vec{s} \Longrightarrow m\vec{v} \cdot d\vec{v} = F \cdot d\vec{s} \Longrightarrow \left[\frac{1}{2}\,mv^2\right]_{v_1}^{v_2} = W$

65. Geben Sie ein Beispiel für seine Anwendung bei Problemen mit Reibung.

- Reibkraft ist keine Konservative Kraft. Wenn an zwei Punkten die E_{kin} sowie die E_{pot} bekannt ist, kann mit Hilfe des Arbeitssatzes die Reibarbeit F_R ermittelt werden.

$$W_{ges} = W_{kons} + W_{nichtkons} = E_{kin2} - E_{kin1}$$

$$mit\ W_{kons.} = E_{pot1} - E_{pot2}$$

$$E_{kin2} - E_{kin1} = E_{pot1} - E_{pot2} + W_{nichtkons}$$

$$W_{nichtkons} = E_{kin2} - E_{kin1} - E_{pot1} + E_{pot2}$$

66. Welche Energieformen kennen Sie?

- Energie ist die Fähigkeit eines Systems Arbeit zu verrichten.
    - E_{kin}, E_{pot}
    - $Strahlungsenergie$
    - $Chemische\ Energie$

67. Wie lautet die kinetische Energie eines rollenden Rades

- bezüglich des Schwerpunktes: $E_{kin} = E_{trans} + E_{rot} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}\Theta_s\omega^2$
- bezüglich des Momentanpols: $E_{kin} = 0$, denn E_{kin} ist für die Bewegung des Schwerpunktes definiert.

68. Was sind konservative Kräfte?

- Kräfte, deren Arbeit auf jedem geschlossenen Weg Null ist, heißen konservativ, z.B. Gewichtskraft.

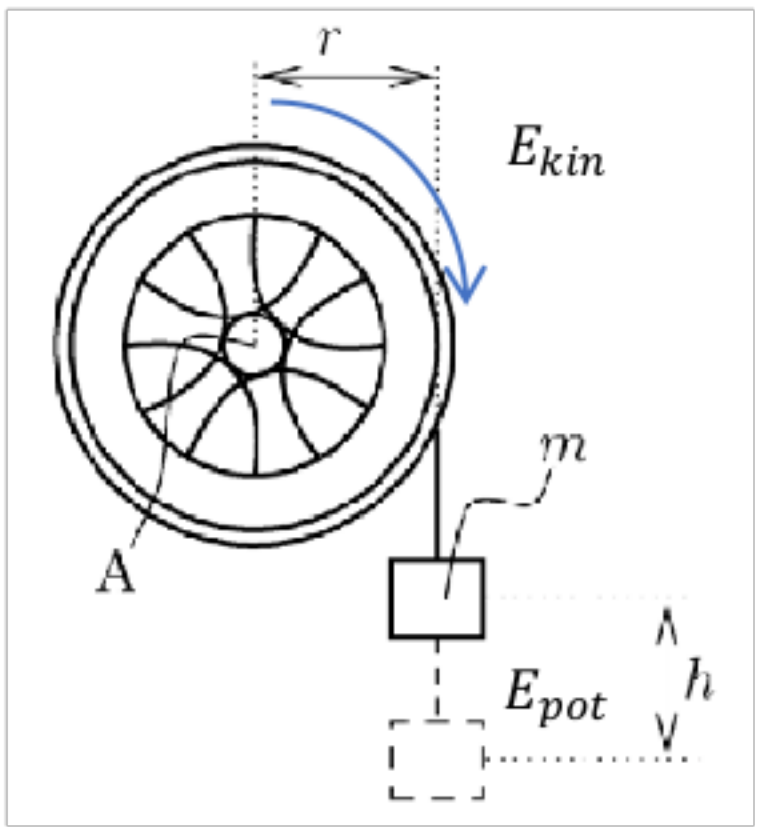
69. Was ist potenzielle Energie? Was ist kinetische Energie?

- Potenzielle Energie ist die Energie aufgrund der Lage eines Körpers in einem Kraftfeld, z.B. Gravitation $E_{pot} = mgh$.
- Kinetische Energie ist die Energie aufgrund der sich translatorisch und rotatorisch bewegenden Masse eines Körpers: $E_{kin} = E_{trans} + E_{rot}$

70. Formulieren Sie den Energieerhaltungssatz.

- $E_{kin1} + E_{pot1} = E_{kin2} + E_{pot2} = konstant$
  Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden, sie wird lediglich von einer Form in eine andre überführt.

Beantworten Sie die Fragen 69 und 70 auch für das folgende mechanische System.

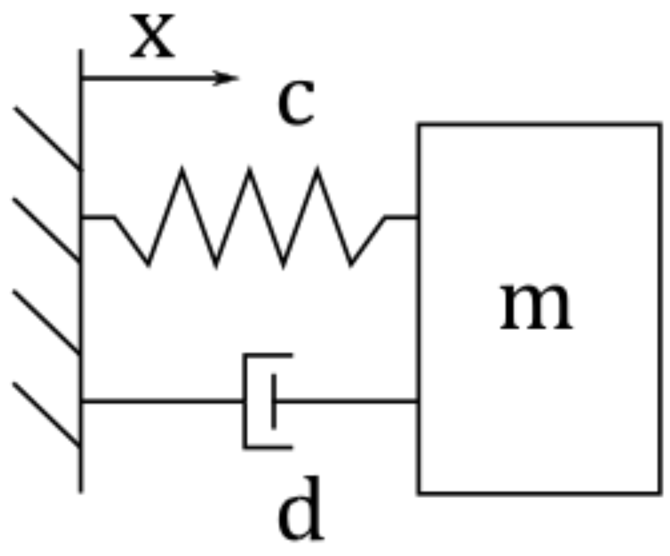


71. Welche Größen bleiben bei einem elastischen, teilelastischen, plastischen Stoß erhalten, welche nicht?

- Beim elastischen Stoß bleibt die E_{kin} erhalten
- Beim plastischen Stoß geht kinetische Energie durch Verformung in Wärme über.
- Der Gesamtimpuls bleibt immer erhalten.

Schwingungen

72. Wie sieht die Differentialgleichung freier Schwingungen aus? Leiten Sie diese für den gedämpften Einmassenschwinger (siehe Skizze) her. Wie sieht ihre allgemeine Lösung aus?



- 2.N.G.: $m\ddot{x} = \sum F_x$ mit $F_F = -cx$ und $F_d = d\dot{x}$

  $m\ddot{x} + cx + d\dot{x} = 0 \,|: m$

  $\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0 \,|\, mit\ \omega_o^2 = \frac{c}{m}\ und\ 2\delta = \frac{d}{m}$

  $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$ Bewegungs-DGL
- Exponentialansatz: $x(t) = Ae^{\lambda t}$
- Allgemeine Lösung: $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$

  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

73. Von welchen Faktoren hängen die Frequenz, Periode, Amplitude und Anfangsphase freier Schwingungen ab?

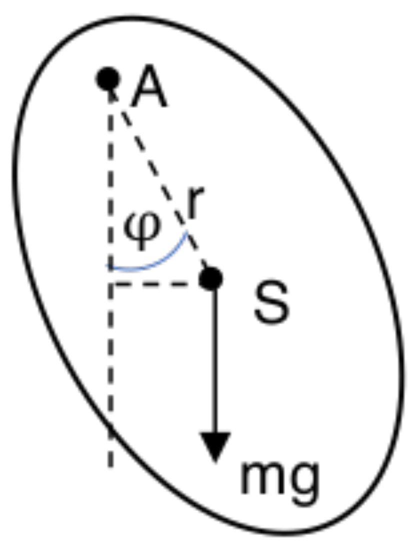
- Die Frequenz hängt von Steifigkeit und Masse ab.

  $f = \frac{1}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$ mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$
- Die Amplitude und Anfangsphase hängen von der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}_0$ und Auslenkung x_0 ab.

74. Beschreiben Sie ein physikalisches Pendel. Stellen Sie die

Bewegungsdifferentialgleichung auf. Bestimmen Sie die Frequenz der Schwingung für kleine Auslenkungen.

- Ist ein beliebiger starrer Körper, der eine ebene Bewegung um einen Punkt A ausführt.



$$\sum M^A = -mgl\,sin\,\varphi + \dot{\vec{L}}^A \stackrel{!}{=} 0$$

Mit $\dot{\vec{L}}^A = \Theta\ddot{\varphi}$ und $sin\,\varphi = \varphi$ für kleine $Winkel$.
Bei physikalischen Pendeln gilt

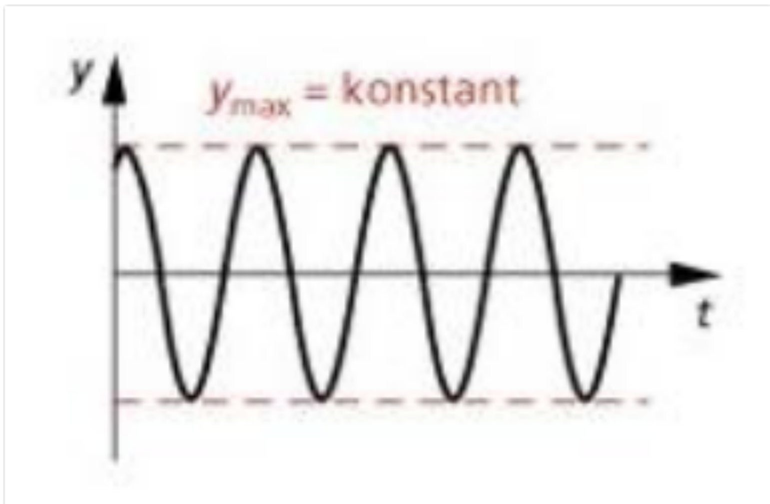
$$\frac{Rückstellkraft}{Masse\ mit\ Steineranteil} = \omega^2 = \frac{mgl}{\Theta_A}$$

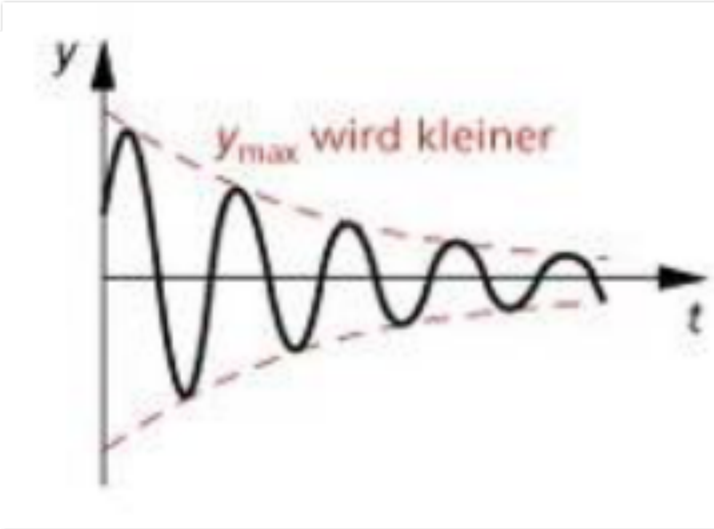
$$\Theta_A\,\ddot{\varphi} + mgl\,\varphi = 0 \,|: \Theta$$

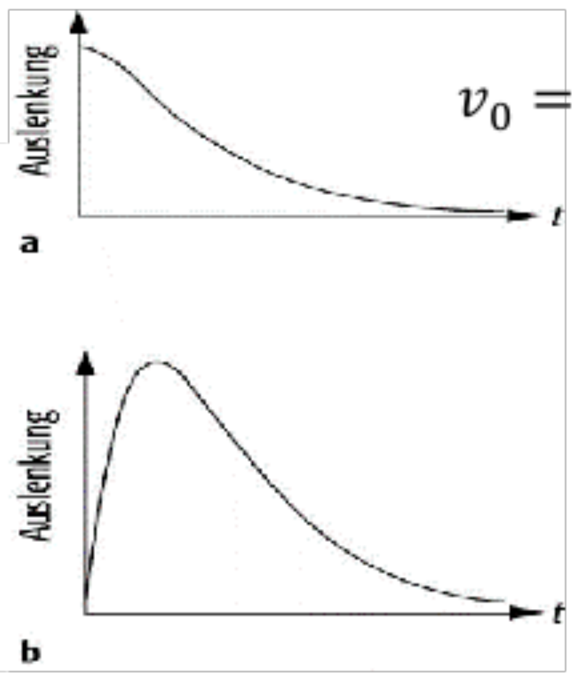
$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{\Theta_A}\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$

75. Wie sehen graphische Darstellungen von freien, schwach gedämpften und aperiodischen Schwingungen aus?







$v_0 = 0, x_0 = x_0$

Freie Schwingung gedämpft aperiodisch

(Anmerkung: in meiner Prüfung wurde die mathematische Formulierung einer gedämpften Schwingung gefragt $x(t) = x_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_D t + \varphi_0)$. Nicht zu verwechseln mit der Allgemeinen Lösung der DGL)

76. Wie sieht die Differentialgleichung erzwungener Schwingungen aus und welche allgemeine Lösung hat sie?

- $m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = F(t)$ |: m, mit $\frac{c}{m} = \omega_0$ und $\frac{d}{m} = 2\delta$

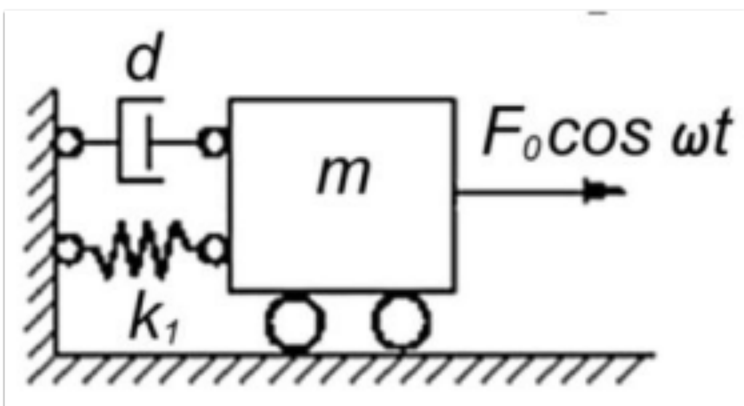
  $$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 = \frac{F(t)}{m}$$

- $x(t) = x_p + x_h = \rho\, cos(\omega t - \varphi) + e^{-\delta t}(A\, cos(\omega t) + B\, sin(\omega t))$

  $\rho =$ $Amplitude$ und $\varphi =$ $Phasenwinkel$

- Nach Einschwingen verschwindet die homogene Lösung x_h

Beantworten Sie die Fragen anhand des abgebildeten Systems.



77. Wie groß sind Frequenz und Periode von erzwungenen Schwingungen?

- Frequenz und Periode von erzwungenen Schwingungen entsprechen

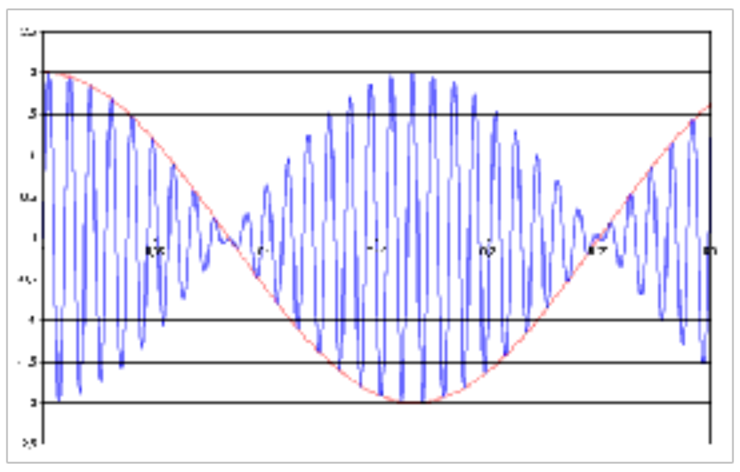
  der nach dem Einschwingen der Erregerfrequenz

78. Von welchen Faktoren hängt die Amplitude einer erzwungenen Schwingung ab?

- Die Amplitude ρ hängt von dem Verhältnis der Erreger- zur

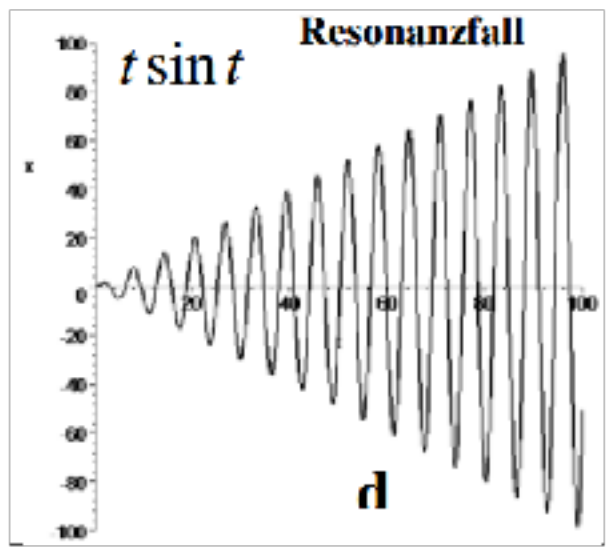
  Eigenkreisfrequenz des Oszilators ab $\frac{\omega_E}{\omega_D} \longrightarrow 1,\ dann\ \rho \longrightarrow max$

79. Unter welchen Bedingungen entstehen Schwebungen? Wie sieht ihre graphische Darstellung aus?



- Schwebung ist ein Effekt der Verstärkung und Annihilation von zwei sich überlangernden, sehr ähnlichen Frequenzen. $f_{schweb.}$ sinkt mit dem Frequenzabstand der Ursprünglichen Frequenzen.

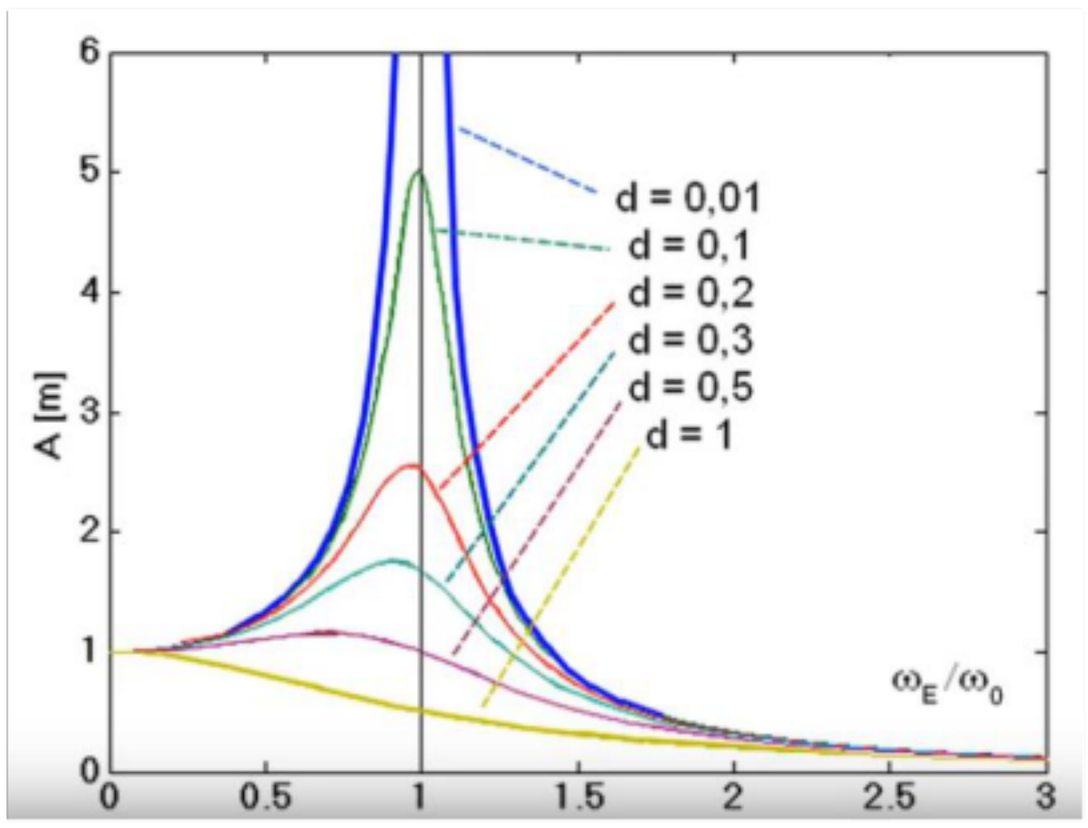
80. Unter welchen Bedingungen entsteht Resonanz? Wie hängt die Koordinate von der Zeit bei Resonanz ab (Gleichung und Bild)?



- Resonanz entsteht, wenn $\omega \longrightarrow \omega_0$
- Mit zunehmender Zeit steigt die Amplitude bis zur Resonanzkatastrophe.

81. Welchen Einfluss hat eine linear von der Geschwindigkeit abhängende Dämpfung auf die Amplitude, Phase, Frequenz und Periode von erzwungenen Schwingungen?

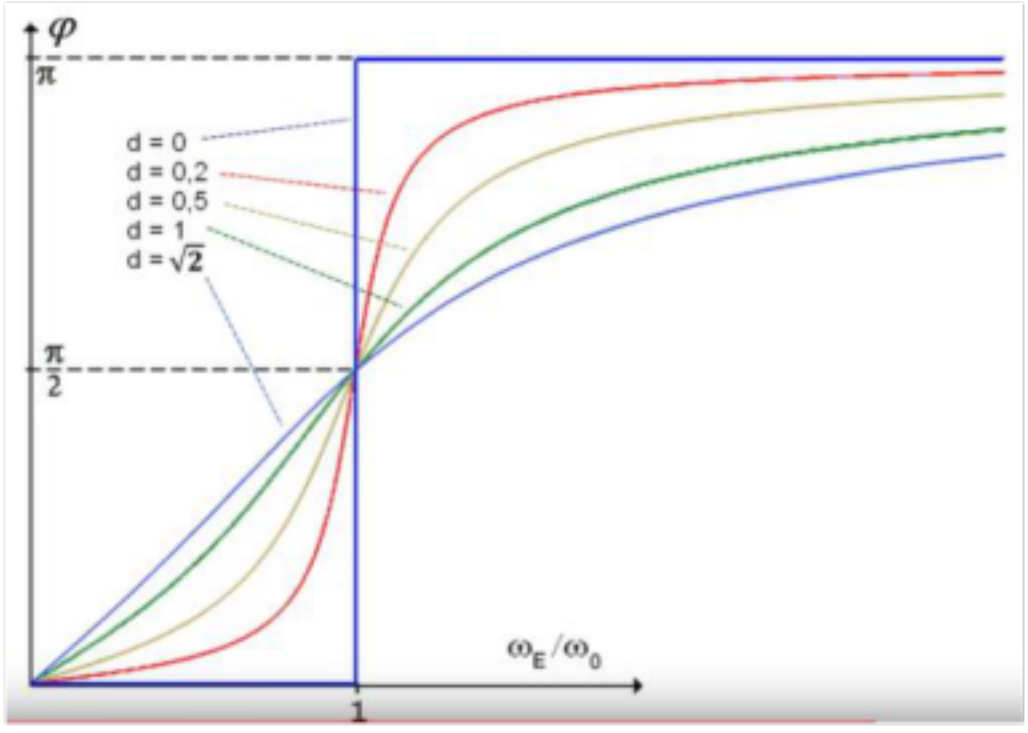
- Je stärker die Dämpfung, desto flacher die Resonanzkurve und desto weiter ist das Resonanz maximum Richtung $\frac{\omega}{\omega_0} < 1$ verschoben
- *Je stärker die Dämpfung desto „glatter" wird der Phasenwechsel* 0 nach π
- Steigende Dämpfung reduziert die Eigenkreisfrequenz $\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$



82. Wie bestimmt man die Erregerfrequenz (und die dazugehörige Amplitude), bei der die Schwingungsamplitude eines gedämpften Systems maximal wird?

- Die Amplitude wird maximal, wenn $\omega_{Erreger} \longrightarrow \omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ geht.
- Amplitude $x_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2 \cdot \delta^2}}$ mit $(\omega_0^2 - \omega^2) \longrightarrow 0$ folgt $x_0 \approx \frac{F_0/m}{2\omega\delta}$

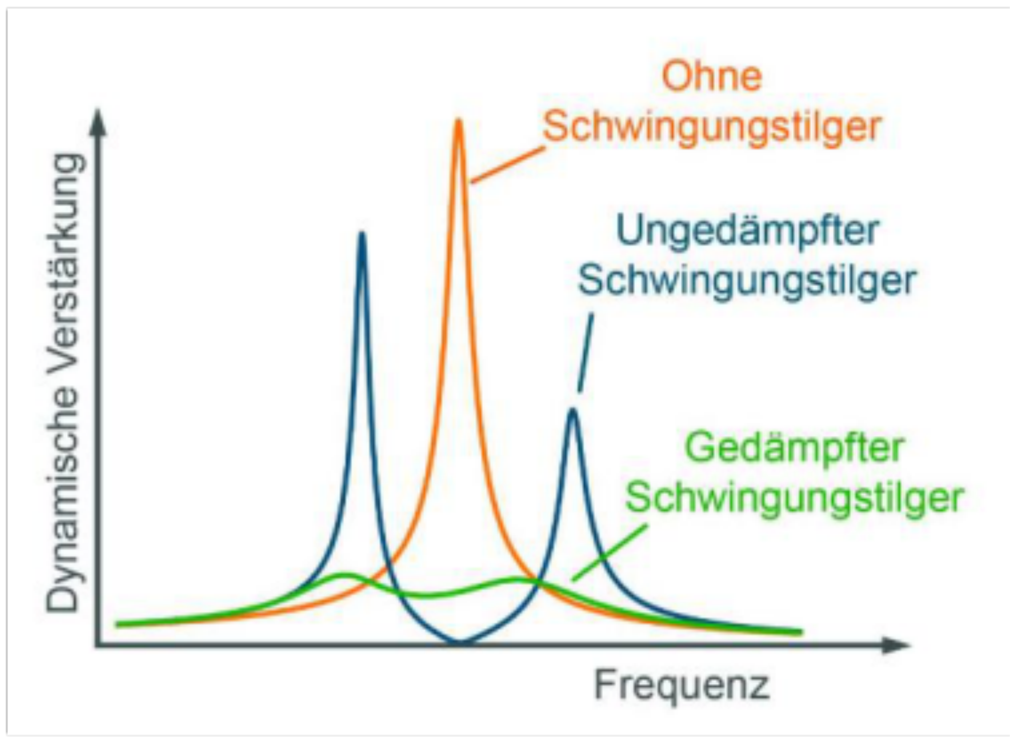
83. Skizzieren Sie die Phasenverschiebung bei erzwungenen Schwingungen in Abhängigkeit von der Frequenz bei verschiedenen Dämpfungsfaktoren.



84. Was sind Eigenfrequenzen und Eigenformen eines Zweimassenschwingers?

- Eigenformen sind Lösungen eines Bewegungs DGL-Systems, die das Verhältnis von schwingenden Massen zueinander angeben.
- Anzahl der Eigenformen = Anzahl der Massen

85. Was ist der Tilgereffekt? Nennen Sie Beispiele, wie man diesen Effekt nutzen kann.



- Ein gedämpfter Einmassenschwinger wird so eingestellt, dass seine ω_D der zu tilgenden Frequenz des Wirtsystems entspricht.
- Wird eingesetzt bei Hochhäusern,
- Langen Freistrecken von Oberleitungen