Technische Universität Berlin
Fakultät II; Institut für Mathematik
Prof. Dr. G. Bärwolff/C. Mense

Wintersemester 2004

8. Februar 2005

Sammlung einiger alter Klausuraufgaben

Aufgabe 1

a) Welche Matrixnorm wird durch die euklidische Vektornorm erzeugt und wie berechnet sich diese?

b) Schätze den relativen Fehler in x bezüglich der Maximumnorm ab, wenn x Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ist, wobei b durch δb gestört sei und

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 10 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 111 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \delta b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c) Wie hängt bei der Cholesky-Zerlegung die Zahl der Rechenoperationen von der Dimension des Gleichungssystems ab?

Aufgabe 2

In einem Experiment wurden folgende Werte (x, y) gemessen:

$$(1, 1.3) \qquad (2, 1.2) \qquad (3, 0.7) \qquad (4, -0.2)\,.$$

Es wird ein linearer Zusammenhang zwischen x und y vermutet. Bestimme diesen Zusammenhang so, daß die Summe der Fehlerquadrate minimal ist. Stelle das Ergebnis einschließlich der Meßwerte graphisch dar.

Aufgabe 3

Die Funktion $f(x) = \cos x$ soll im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ interpoliert werden.

a) Bestimme das interpolierende Polynom p zu den Stützstellen $-\pi/2$, 0 und $\pi/2$.

b) Bestimme mit Hilfe von p eine Näherung für $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx$ und vergleiche mit dem exakten Wert.

c) Skizziere f und p im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ unter Beachtung des Ergebnisses aus b).

Aufgabe 4

a) Gesucht ist eine Näherung für die Zahl $\ln a$, $a > 0$. Dazu wird eine Newton-Iteration zur Bestimmung der Nullstelle von $f(x) = e^x - a$ betrachtet. Wie lautet die Iterationsvorschrift?

b) Wählt man für das Newton-Verfahren in a) einen Startwert $x_0 > \ln a$, so kann gezeigt werden, daß für die Iterierten x_k, $k = 0, 1, \ldots$, gilt: $x_k > x_{k+1} > \ln a$. Beweise damit:

   i) die Folge der Iterierten konvergiert gegen $\ln a$;

   ii) es gilt die Abschätzung $|x_{k+1} - \ln a| \le \frac{1}{2}\,|x_k - \ln a|^2$.

d) Mit Hilfe des Newton-Verfahrens soll das nichtlineare Gleichungssystem

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\,xy\right) = e^{x-y}, \qquad x^2 + y^2 = 2$$

näherungsweise gelöst werden. Bestimme die erste Iterierte, wenn mit $(1, 0)^T$ gestartet wird.
(Verwende $3e/(\pi + 2e) \approx 0.95$.)

Aufgabe 5

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -26 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme die LU-Zerlegung von A

b) Löse das Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der LU-Zerlegung von A.

Aufgabe 6

Betrachte das folgende implizite Verfahren

$$y_{i+1} = y_i + h\ f(t_{i+1}, y_{i+1})$$

zur Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t,y), y(t_0) = y_0$. Bestimme die Konsistenzordnung.

Aufgabe 7

Das Gleichungssystem

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x + 2y + yz \\ xy - 2z + z^2 \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ist zu lösen. Berechne die für das Newton-Verfahren benötigte Ableitungsmatrix $\mathbf{F}'(x,y,z)$ und berechne ausgehend von $\mathbf{x}_0 = (1,0,1)$ die erste Newton-Iterierte $\mathbf{x}_1$.

Aufgabe 8

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Determinante von A und untersuche A auf Definitheit und Orthogonalität.