Technische Universität Berlin Wintersemester 2004/2005
Fakultät II; Institut für Mathematik
Prof. Dr. G. Bärwolff/C. Mense 11.02.2005

Probeklausur zur LV Numerik für Informatiker
Lösungen

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die LU-Zerlegung (ohne Pivotsuche) der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Lösen Sie mit Hilfe der LU-Zerlegung aus a) das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (8,\ 21,\ 35)^T$.

c) Warum ist Pivotisierung bei der LU-Zerlegung für manche nichtsinguläre Matrizen notwendig? Geben Sie ein einfaches Beispiel an, wo Pivotisierung notwendig ist.

Lösung

a) Da

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{pmatrix}}_{=A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}}_{=R}$$

gelten soll, ergibt sich somit durch $a_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{3} l_{ik} r_{kj}$ die Gleichungen:

$$\begin{array}{rcll}
3 & = & 1*r_{11} + 0*0 + 0*0 & \Rightarrow r_{11} = 3 \\
2 & = & 1*r_{12} + 0*r_{22} + 0*0 & \Rightarrow r_{12} = 2 \\
1 & = & 1*r_{13} + 0*r_{23} + 0*r_{33} & \Rightarrow r_{13} = 1 \\
6 & = & l_{21}*3 + 1*0 + 0*0 & \Rightarrow l_{21} = 2 \\
6 & = & 2*2 + 1*r_{22} + 0*0 & \Rightarrow r_{22} = 2 \\
3 & = & 2*1 + 1*r_{23} + 0*r_{33} & \Rightarrow r_{23} = 1 \\
9 & = & l_{31}*3 + l_{32}*0 + 1*0 & \Rightarrow l_{31} = 3 \\
10 & = & 3*2 + l_{32}*2 + 1*0 & \Rightarrow l_{32} = 2 \\
6 & = & 3*1 + 2*1 + 1*r_{33} & \Rightarrow r_{31} = 1
\end{array}$$

Somit lautet die LU-Zerlegung:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alternativ: Mit dem Gaußverfahren erhält man

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ (II) - 2*(I) \\ (III) - 3*(I) \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (III) - 2*(II) \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit den Koeffizienten 2, 3 bzw. 2 und dem Ergebnis des Gauß-Eliminationsverfahrens erhält man

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Als Lösung des linearen Gleichungssystems erhält man aus

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow Ly = b \text{ und } Rx = y$$

schließlich mittels Vorwärts- bzw. Rückwärtseinsetzen die Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \\ 35 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Schon bei dem sehr einfachen Gleichungssystem, wie z.B.:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

funktioniert die LR-Zerlung ohne Pivotisierung nicht.

Aufgabe 2

Es seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 1 & 1.1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 2.1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Lösungen x bzw. $\tilde{x}$ der Gleichungssysteme $Ax = b$ bzw. $A\tilde{x} = \tilde{b}$ an.

b) Bestimmen Sie die relativen Fehler in x und b in einer beliebigen Vektornorm.

c) Erklären Sie den verhältnismäßig großen relativen Fehler in x in Bezug zum verhältnismäßig kleinen relativen Fehler in b.

Lösung

a) Lösung der LGS's

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0.9 & 1.9 & 2 \\ 1 & 1.1 & 2.1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0.9 & 1.9 & 2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0.9 & 1.9 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \tilde{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) Relativer Fehler in b

$$\frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{pmatrix} 1.9 \\ 2.1 \end{pmatrix} \right\|_\infty} = \frac{0.1}{2.1} = \frac{1}{21}$$

Relativer Fehler in x

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_\infty} = \frac{1}{1} = 1$$

c) Inverse von A

$$\det(A) = 1 \cdot 1.1 - 1 \cdot 0.9 = 0.2 \qquad A^{-1} = \frac{1}{0.2} \begin{bmatrix} 1.1 & -0.9 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5 & -4.5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

Kondition von A

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \left\| \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 1 & 1.1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 2.1 \qquad \|A^{-1}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 5.5 & -4.5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 10 \\ \kappa(A)_\infty &= \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 2.1 \cdot 10 = 21 \end{aligned}$$

Abschätzung

$$1 = \frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \quad \leq \quad \kappa(A)_\infty \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 21 \cdot \frac{1}{21} = \frac{21}{21} = 1$$

Wie man der obigen Abschätzung ansieht, verstärkt die Kondition der Matrix den relativen Fehler in b. So kann es zu dem verhältnismäßig großen relativen Fehler in x kommen.

Aufgabe 3

Die Funktion $f(x) = \cos x$ soll im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ interpoliert werden.

a) Ist eine lineare Interpolation mit den Intervallenden als Stützstellen sinnvoll? Bergründen Sie ihre Aussage.

b) Man bestimme das interpolierende Polynom p zu den Stützstellen $-\pi/2$, 0 und $\pi/2$.

c) Mit Hilfe von p bestimme man eine Näherung für $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx$ und vergleiche mit dem exakten Wert.

Lösung

a) Die lineare Interpolation mit den Intervallenden als Stützstellen ist nicht sinnvoll, da die Funktion in den Intervallenden jeweils den Wert Null hat, allerdings im offenen Intervall echt größer als Null ist.

b) Eine Möglichkeit das Interpolationspolynom zu bestimmen ist, das folgende Vorgehen:
Gesucht ist $p(x_k) = a + bx_k + c{x_k}^2 = y_k, k = 1, 2, 3$. Dies führt auf das lineare Gleichungsystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -\pi/2 & (-\pi/2)^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \pi/2 & (\pi/2)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gaussalgorithmus erhält man $\begin{pmatrix} a, & b, & c \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1, & 0, & \frac{1}{(\pi/2)^2} \end{pmatrix}^T$ und somit das Polynom

$$p(x) = 1 - \frac{x^2}{(\pi/2)^2} = 1 - \frac{4}{\pi^2}x^2 \; .$$

Natürlich kann dieses Polynom auch mittels Lagrange-Interpolation bestimmt werden.

c) Es ergibt sich

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{4}{\pi^2}x^2)\, dx = [x - \frac{4}{3\pi^2}x^3]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\pi \approx 2.0944$$

und

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \sin x|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

so dass sich ein Fehler von $e = 0.0944$ ergibt.

Aufgabe 4

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y''(t) = -y'(t) + t^2 y(t), \quad y(t_0) = \nu_0, \quad y'(t_0) = \nu_1$.

a) Reduzieren Sie das Anfangswertproblem durch Hinzunahme zusätzlicher Variablen auf ein Anfangswertproblem für ein System erster Ordnung.

b) Führen Sie einen Schritt des expliziten Eulerverfahrens durch. Dabei sei $t_0 = 0, h = 1$ und $\nu_0 = \nu_1 = 1$.

c) Führen Sie einen Schritt des impliziten Eulerverfahrens durch. Dabei sei $t_0 = 0, h = 1$ und $\nu_0 = \nu_1 = 1$.

Lösung

a) Mit den Variablen $y_1(t) = y(t)$ und $y_2(t) = y'(t)$ erhält man für $\vec{y} = \binom{y_1}{y_2}$ das System 1. Ordnung

$$\vec{y}\,' = \vec{F}(t, \vec{y}), \quad \vec{F}(t, \vec{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_2 + t^2 y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(t_0) = \begin{pmatrix} \nu_0 \\ \nu_1 \end{pmatrix}.$$

b) Das explizite Newton-Verfahren

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k + h\vec{F}(t_k, \vec{y}_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ergibt für $t_0 = 0$ und $h = \nu_0 = \nu_1 = 1$

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Wir verschieben aus Übersichtsgründen den Iterationsindex nach oben:

$$\vec{y}^{(k+1)} = \vec{y}^{(k)} + h\vec{F}(t^{(k+1)}, \vec{y}^{(k+1)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ergibt für $t^{(0)} = 0$ und $h = \nu_0 = \nu_1 = 1$

$$\vec{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1^2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mit der Lösung $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Ordnung der Approximation

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} \approx y'(x)\,,$$

d.h. bestimmen Sie das minimale $p \in \mathbb{N}$ mit $\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - y'(x) = O(h^p)$, wobei die 2. Ableitung von $y(x)$ als beschränkt vorausgesetzt wird.

Lösung

Nach dem Satz von Taylor gibt es eine Zahl ξ zwischen x und $x+h$, so dass

$$y(x+h) = y(x) + h\,y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(\xi)$$

gilt. Damit erhält man

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - y'(x) = \frac{h}{2} y''(\xi) =: O(h)\ ,$$

also die Ordnung $p = 1$.

Alternativ

Es gilt:

$$y(x+h) = y(x) + h\,y'(x) + \frac{h^2}{2}\,y''(x) + O(h^3)$$

Also

$$y(x+h) - y(x) - h\,y'(x) = \frac{h^2}{2}\,y''(x) + O(h^3) = O(h^2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{y(x+h)-y(x)}{h} - y'(x) = O(h)$$

Also ist die Ordnung $p = 1$.