Prüfungsprotokoll Mathematik

Fach: Numerische Mathematik für Ingenieurswissenschaften II

☐ Bachelor
■ Master

Prüfer/in: Dr. Raphael Kruse
Datum: 28.02.2017
Prüfungsdauer: 25 Minuten

Beisitzer/in: Dr. Adrien Semin
Note: 1.3
Anzahl der Kandidaten: 1

Vorbereitungszeit: 2 Wochen intensiv
Literatur: Skript

Beurteilung der Prüfung und des/r Prüfers/in:

Die Prüfung dauerte ca. 25 Minuten, wir haben sofort losgelegt, aber es war ok zu überlegen. Ich glaube, dass das alle Fragen sind, die mir gestellt wurden.

1 Allgemeine Theorie

1.1 Wie sieht eine allgemeine PDE zweiter Ordnung aus?

$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\delta^2}{\delta x_i x_j} u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\delta}{\delta x_i} u(x) + cu(x) = f(x)$
Leider hab ich hier erwähnt, dass das Minuszeichen Konvention sei. Also kam prompt die Frage, wieso. Ich sagte irgendetwas von wegen, dass das bestimmt mit der Energie zu tun hat. Er meinte, auch, aber dass er auf etwas anderes hinauswolle, weil das nämlich später sehr praktisch sei. Daraufhin fiel mir ein, dass wir ja beim Anwenden der Produktregel bei den FEM hier eine Addition erhalten. Damit war er zufrieden.

1.2 Wie entsteht hier die Diffusionsmatrix?

Ich sagte, dass sie aus jener Summe über die Partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, also aus den $a_{i,j}$s entsteht. Wobei wir bedenken müssen, dass wir wissen, dass $\frac{\delta^2}{\delta x_i x_j} = \frac{\delta^2}{\delta x_j x_i}$ und wir also eine symmetrische Matrix bekommen. Diese sollte ich kurz aufschreiben, also: $A_{ij} = [\frac{1}{1}(a_{ij} + a_{ji})]_{i,j=1}^{n}$

1.3 Warum ist das toll mit dieser symmetrischen Matrix?

Er wollte darauf hinaus, dass wir deshalb reelle Eigenwerte haben und dadurch unsere Klassifizierung erst funktioniert.

1.4 Und wie klassifizieren wir?

Das hängt von den Eigenwerten ab, es gibt elliptische, parabolische und hyperbolische PDEs zweiter Ordnung. Nun sollte ich sagen, wie die Eigenwerte dazu aussehen, also:

- elliptisch: alle Eigenwerte strikt positiv oder alle Eigenwerte strikt negativ
- parabolisch: ein Eigenwert 0, restliche strikt positiv oder strikt negativ. Hier fragte er direkt noch nach weiteren Bedingungen, also hab ich gesagt, dass der Rang von $[Ab]$, wobei b die Terme der Ableitungen erster Ordnung sind, gleich n sein muss.
- hyperbolisch: ein Eigenwert strikt negativ, restliche strikt positiv oder umgekehrt.

Dann wollte er ein Beispiel für hyperbolisch wissen, hat sich aber versprochen und die Wellengleichung schon gesagt. Also gings nun ab mit der Wellengleichung, ich habe aufgeschrieben:
$u_{tt} - u_{xx} = f \qquad u : (0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1.5 Ist die jetzt well-posed? Wie können wir das erreichen?

Nein, denn dafür brauchen wir Existenz, Eindeutigkeit (die hier verletzt ist) und Stabilität in Bezug auf die Daten.
Wir könnten Anfangsbedingungen setzen, zB:
$u(0, x) = v(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
$\frac{\delta}{\delta t} u(0, x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

1.6 Was bedeutet denn Stabilität und warum ist sie wichtig?

Dass der Unterschied in Lösungen zu verschiedenen Anfangsbedingungen durch den Unterschied in den entsprechenden Anfangsbedingungen beschränkt ist. Wichtig ist das, logischerweise, aber das wusste ich in dem Moment nicht, damit wir uns sicher sein können, dass z.B. Messfehler nicht unsere gesamte Approximation zerstören.

1.7 Für die Wellengleichung haben wir ja die Existenz gezeigt, können Sie das?

Puh, das wusste ich eigentlich nicht. Ich habe gesagt, dass wir ja Charakteristiken gezeigt haben, wie z.B. für die Transportgleichung. Darauf ist er praktischerweise angesprungen und ich konnte erstmal über die Richtungsableitung entlang $\nu = (1, b)^T$ bei der Transportequation
$u_t - bu_x = 0$
$u(0, x) = v(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
reden. Dass das bedeutet, dass wir entlang ν keine Steigung haben, da $< \nu, (1, b)^T >= 0$. Mit ein bisschen Hilfe hab ich dann auch noch gesagt, dass wir die Lösung $u(t, x) = v(x + b * t)$ haben und sie also existiert. Weil ich hierfür so lange gebraucht habe und es also klar war, dass ich gerade etwas verwirrt bin, musste ich nun noch zeigen, dass das stimmt, also:
$\frac{\delta}{\delta t} v(x + b * t) - b * \frac{\delta}{\delta x} v(x + b * t) = b * v'(x + b * t) - b * v'(x + t * b) = 0.$
Wie man das nun auf die Wave equation überträgt, wusste ich nicht. Es hätte ihm aber vermutlich gereicht, wenn man D'Alembert erwähnen hätte können und vielleicht dazu noch ein, zwei Sätze sagen könnte.

2 FDM

2.1 Bleiben wir bei der Transport equation. Da haben wir ja eigentlich nur FDM gemacht, also können Sie nun nicht wählen. Wie kann man mit FDM die Transport equation approximieren?

Es gibt verschiedene Verfahren, z.B. Upwind, Friedrichs or Lax-Wendroff-scheme. Ich durfte mir eines heraussuchen, das ich herleiten sollte. Upwind, so erklärte ich, sei zum Herleiten

einfach und man würde ja dann im Verlauf die Nachteile erkennen können, weshalb die anderen eigentlich besser seien. Wir wählen forward differences und setzen $k > 0, h > 0$ als zeitliche und räumliche Schrittgröße, wobei $t_l = l * k$ und $x_j = j * h$.
$\frac{1}{k}(U_j^{l+1} - U_j^l) = b * \frac{1}{h}(U_{j+1}^l - U_j^l)$ ... daraus ergibt sich, mit ein bisschen rechnen, ich kann sowas nicht im Kopf ...
$U_j^{l+1} = b * \lambda U_{j+1}^l + (1 - b * \lambda)U_j^l$, wenn wir $\lambda = \frac{k}{h}$ setzen.
Hier sehen wir die Konvexität, die uns Stabilität garantiert, solange $0 < \lambda < 1$, was die CFL-condition ist.

2.2 Was bedeutet die CFL-condition?

Dass die Domain of Dependence des kontinuierlichen Problems in der Domain of Dependence des diskreten Problems enthalten ist. Hier sollte ich das Bildchen aus dem Skript malen und daran zeigen, wie die CFL-condition darin aussieht ($x_j < x + b * t < x_{j+l+1}$).

2.3 Wie ist die Konvergenzrate?

1, wenn $u \in C^2$. Wenn wir wollten, dass die Konvergenzrate höher ist, müssten wir ein anderes Verfahren wählen, aber auch das hilft nur, wenn die Regularität der exakten Lösung auch steigt, i.e. $u \in C^3$ für Konvergenzrate 2 bei z.B. Lax-Wendroff.

3 FEM

3.1 Ok, das muss reichen, wie geht man denn eine Approximation mit FEM an, z.B. von der Poisson Gleichung in 1d, auf dem Intervall (0,1)?

Erstmal die Gleichung hingeschrieben:
$-\Delta u = f \qquad in\ (0,1)$
$u(0) = u(1) = 0$
Wir beginnen mit der Diskretisierung. Hier hab ich mich ein bisschen angestellt, weil ich erstmal nicht wusste, wo ich anfangen soll. Letzten Endes habe ich dann aber folgendes hingeschrieben
$0 = x_0 < x_1 < ... < x_{n+1} = 1$
$\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$.
Dann brauchen wir Funktionen auf den jeweiligen Omegas. Zum Beispiel könnten wir hier lineare Funktionen nehmen. Dabei sollten wir darauf achten, dass sie jeweils an einem Knoten 1 und an den anderen 0 sind, damit wir später eine sparse Matrix bekommen.

Außerdem müssen wir das Problem umstellen, also es schwach formulieren. Da erhalten wir, in diesem Fall, dank der schönen Randbedingungen:
$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1$.
Hier wurde ich direkt gefragt, was das H_0^1 bedeutet, wie der Raum heißt, ob wir ihn zum Ärgern der Ingenieure eingeführt hätten oder weshalb wir ihn hier haben. Antwort: Sobolev-Raum erster Ordnung, den wir hier nutzen, da wir für das schwache Problem schwache Ableitbarkeit reicht und wir so die linearen Funktionen benutzen können, die ich auch noch einmal kurz aufmalen durfte, wie die aussehen.

Nun wollte er wissen, wie die Bilinearform $a(.,.)$ zu unserer Matrix führen würde. Ich war ein bisschen verwirrt und dachte, er wolle, dass ich ihm die Matrix für jene piecewise linear functions aufschreibe, aber was er eigentlich sehen wollte, war:
$A_{i,j} = [a(\phi_i, \phi_j)]_{i,j=1}^n$

Ich glaube, hier war die Zeit dann auch schon vorbei und wir mussten recht abrupt abbrechen. Bemängelt wurde, dass ich D'Alembert nicht wusste und im Allgemeinen sehr langsam war, weshalb wir nur zu so wenig gekommen sind. Ich habe von vielen gehört, die überrascht waren, dass die Theorie aus dem ersten Kapitel so genau abgefragt wurde. Darauf war auch ich nicht vorbereitet, aber Dr. Kruse weiß doch, dass es ein Numerik-Kurs ist und legt bei der Benotung mehr wert auf das Wissen auf den letzten 3 Kapiteln.

Viel Erfolg! :)