Grundlagen der Regelungstechnik

Name:

Matrikelnummer:

Abschließender Hinweis für die Abgabe:

Da die Blätter der Aufgabenstellung Bestandteil Ihrer Prüfungsleistung sind, müssen Sie demgemäß mitabgegeben werden. Anderenfalls können keine Punkte für die auf den Aufgabenblättern gelösten Teilaufgaben vergeben werden!

- **Der ausgeteilte Mantelbogen ist zudem vollständig mit Ihren persönlichen Daten auszufüllen,**
- **die Anzahl der eingelegten Blätter anzugeben und**
- **jedes Einlegeblatt mit Ihren persönlichen Daten zu versehen.**

Aufgabe 1: Kurzaufgaben

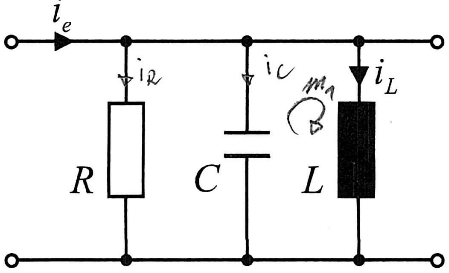
a) Gegeben sind die folgenden Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{(s-2)}{(s+k_1)\cdot(s+1)},$$

$$G_2(s) = \frac{(s+1)}{(s+1)\cdot(s^2+k_2\cdot s+s+k_2)}.$$

Für welche Werte von k_1 und k_2 sind die Übertragungsglieder jeweils stabil?

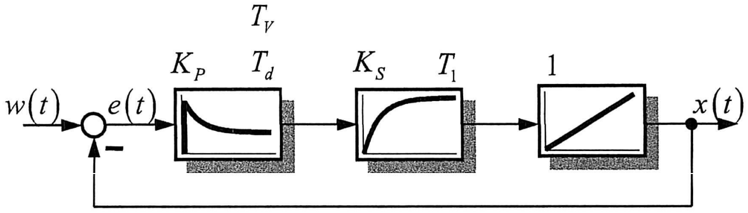
b) Stellen Sie für den folgenden elektrischen Parallelschwingkreis die Differentialgleichungen auf. Dabei ist i_e die Eingangsgröße und i_L die Ausgangsgröße des Systems.



Wie könnte das Simulinkmodell aussehen (Skizze), mit dem die Dynamik des Systems simuliert werden kann.

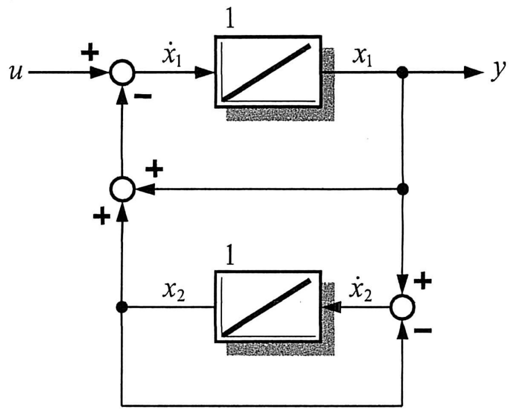
Aufgabe 2: Reglerentwurf nach Polvorgabe

Für die nachfolgend dargestellte I-T_1-Regelstrecke mit PD-T_1-Regler sollen unter Verwendung der Kompensationsmethode die Reglerverstärkung K_p und die Zeitkonstante T_d so gewählt werden, dass sich für den geschlossenen Regelkreis Butterworth-Verhalten mit der Grenzkreisfrequenz $\omega_g = \omega_{gR}$ einstellt.



Aufgabe 3: Zustandsreglerentwurf

Gegeben ist der folgende Wirkungsplan:



a) Stellen Sie die Zustandsgleichungen für das dargestellte System auf.

b) Überprüfen Sie die Stabilität der Regelstrecke.

c) Entwerfen Sie eine vollständige Zustandsregelung mit einer doppelten Polstelle bei $s = -2$ auf Basis der RNF.

d) Entwerfen Sie einen Zustandsbeobachter mit den Polen $s_1 = 2\left(-\sqrt{2} + j\sqrt{2}\right)$ und $s_2 = 2\left(-\sqrt{2} - j\sqrt{2}\right)$ auf Basis der BNF.

e) Berechnen Sie das Matrizenprodukt $\mathbf{T}_R \cdot \mathbf{T}_B^{-1}$.

Rechnung

1. Aufgabe → Kurzaufgaben

a) ▷ Übertragungsglieder sind asymptotisch stabil, wenn die Polstellen mit positivem Realteil haben

$\boxed{G_1(s)}$ $s_1 = -k_1 \;,\; s_2 = -1$ ⇒ für k_1 muss gelten: $k_1 > 0$

$\boxed{G_2(s)}$ NR: $s^2 + (1+k_2) + k_2 \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow s_{1,2} = -\frac{1+k_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(1+k_2)^2}{4} - k_2} = -\frac{1+k_2}{2} \pm \sqrt{\frac{1+k_2^2+2k_2-4k_2}{4}}$$

$$= -\frac{1+k_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-k_2)^2}{4}} = -\frac{1+k_2}{2} \pm \frac{1-k_2}{2}$$

$$\Rightarrow s_1 = \frac{-1-k_2+1-k_2}{2} = -k_2$$

$$s_2 = \frac{-1-k_2-k+k_2}{2} = -1$$

$(s+1) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow s_3 = -1$

↳ somit gilt auch für $k_2 > 0$

b) ▷ Anwenden der Knotenregel:

$$i_e = i_R + i_C + i_L = \frac{u_R}{R} + C \cdot \frac{du_C}{dt} + i_L \underset{u_R = u_C}{=} \frac{u_C}{R} + C\frac{du_C}{dt} + i_L = i_e \; (1)$$

▷ Maschenregel m_1:

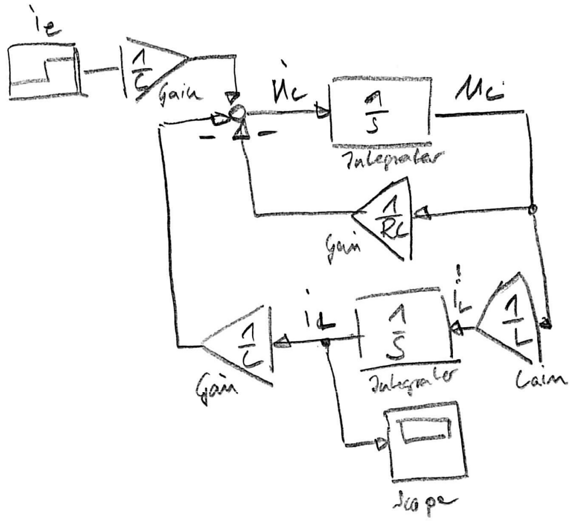
$$u_L = u_C = L\frac{di_L}{dt} \quad (2)$$

▷ umstellen von (1), (2) nach höchster Ableitung:

$$\frac{d}{dt}u_C = \frac{1}{C}i_e - \frac{1}{C}\cdot i_L - \frac{1}{R\cdot C}u_C$$

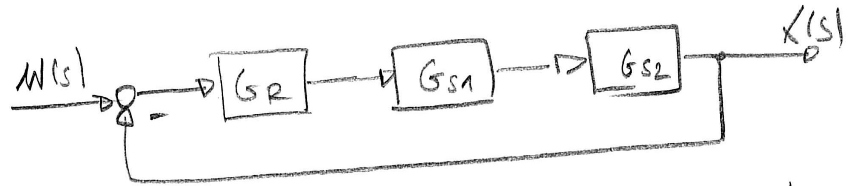
$$\frac{d}{d}i_L = \frac{1}{L}u_C$$

Simulink modell:



- die Integratorglieder könnten bei Bedarf noch mit Integrationskonstanten versehen werden

Aufgabe 2 → Reglerentwurf mit Polvorgabe



$$G_R = K_p \frac{1+T_v \cdot s}{1+T_d s} \quad \Big| \quad G_{S1} = \frac{K_s}{1+T_1 s} \quad \Big| \quad G_{S2} = \frac{1}{s}$$

- somit ergibt sich für den offenen Regelkreis:

$$G_0(s) = G_R G_{S1} G_{S2} = \frac{K_p \cdot K_s (1+T_v \cdot s)}{(1+T_d s)(1+T_1 \cdot s) \cdot s}$$

- anwenden der Kompensationsmethode $T_v = T_1$

$$\Rightarrow G_0(s) = \frac{K_p K_s}{(1+T_d s) s} \Rightarrow \text{zwei freie Parameter } K_p \text{ und } T_d$$

- geschlossener Regelkreis:

$$\Rightarrow G_w(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{K_p K_s}{(1+T_d s)s + K_p \cdot K_s} \equiv \frac{Z_w(s)}{N_w(s)}$$

$$N_w(s) = T_d s^2 + s + K_p \cdot K_s \overset{!}{=} 0 \Rightarrow s^2 + \frac{1}{T_d} \cdot s + \frac{K_p \cdot K_s}{T_d} = 0$$

$$\Rightarrow s_{1,2} = -\frac{1}{2 T_d} \pm \sqrt{\frac{1}{4 T_d^2} - \frac{K_p K_s}{T_d}}$$

$$\overset{!}{=} -\frac{1}{2 T_d} \pm i \sqrt{\frac{K_p K_s}{T_d} - \frac{1}{4 T_d^2}}$$

▷ für Butterworth verhalten gilt: $s_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \omega_{gR} \pm j \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_{gR}$

▷ wir führen nun einen Koeffizienten vergleich durch:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \omega_{gR} \overset{!}{=} -\frac{1}{2T_d} \Rightarrow T_d = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \omega_{gR}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \omega_{gR} \overset{!}{=} \sqrt{\frac{K_p K_s}{T_d} - \frac{1}{4T_d^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} \omega_{gR}^2 = \frac{K_p K_s}{T_d} - \frac{1}{4T_d^2}$$

$$K_p \cdot K_s = \frac{T_d}{2} \omega_{gR}^2 + \frac{1}{4T_d} = \frac{\omega_{gR}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}\,\omega_{gR}}{4} = \omega_{gR} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$\Rightarrow K_p = \frac{\omega_{gR}}{\sqrt{2} \cdot K_s}$$

Aufgabe 3 → Zustandsreglerentwurf

a) $\dot{x}_1 = u - (x_1 + x_2)$

$\dot{x}_2 = x_1 - x_2$

▷ Zustands-DGL

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=b} u$$

▷ Ausgangs-DGL

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:c^T} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen der Eigenwerte von A:

$$\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = ((-1)(1+\lambda))^2 + 1$$

$$\overset{!}{=} \lambda^2 + 2\lambda + 1 + 1 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} \overset{!}{=} -1 \pm j$$

⇒ Realteil der Eigenwerte ist negativ, somit ist die Regelstrecke asymptotisch stabil

3c) ▷ überprüfen auf Steuerbarkeit → notwendig?

Steuerbarkeitsmatrix: $S_u = [b \quad Ab] \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

NR: $A \cdot b = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}$

▷ überprüfen des Rangs: $\det(S_u) = 1 \neq 0$ ✓ ⇒ voller Rang

↳ somit ist das System (A, b) vollständig steuerbar nach Kalman

▷ überprüfen der Beobachtbarkeit → notwendig?

Beobachtbarkeitsmatrix: $B_y = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T \cdot A \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

NR: $c^T \cdot A = (1 \; 0)\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1 \; -1)$

▷ überprüfen des Rangs: $\det(B_y) = -1 \neq 0$ ⇒ voller Rang

↳ somit ist das System (A, c^T) vollständig beobachtbar nach Kalman

▷ Transf. in RNF

$S_u^{-1} = \frac{1}{\det(S_u)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\leftarrow s_u^T$

$T_R = \begin{pmatrix} s_u^T \\ s_u^T \cdot A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$T_R^{-1} = \frac{1}{\det(T_R)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A_R = T_R \cdot A \cdot T_R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & +1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$b_R = T_R \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$c_R^T = c^T \cdot T_R^{-1} = (1 \; 0)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1 \; 1)$

▷ wir betrachten nun den allgemeinen Fall der RNF und führen einen Koeffizientenvergleich durch:

$$b_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2} \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = 1$$

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{pmatrix} \Rightarrow a_0 = 2 \;, \; a_1 = 2$$

$$c_R^T = (1 \quad 1) \overset{!}{=} (b_0 \quad b_1) \Rightarrow b_0 = 1$$

▷ aufstellen Wunschpolynom

$$p_{WR} = (s+2)^2 = \underbrace{1}_{=p_2} s^2 + \underbrace{4}_{=p_1} s + \underbrace{4}_{=p_0}$$

▷ nach Ackermann folgt:

$$r_1 = \frac{p_0}{p_2} \cdot a_2 - a_0 = 4 \cdot 1 - 2 = 2$$

$$r_2 = \frac{p_1}{p_2} \cdot a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$$

$$r^T = [2 \quad 2]$$

$$q_1 = \frac{a_0 + r_1}{b_0} = \frac{2+2}{1} = 4 \qquad q_1 = 4$$

3d) Transf. in BNF

$$A_B = A_R^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det(A_R)} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_B = c_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_R = b_R^T = (0 \quad 1)$$

▷ aufstellen Wunschpolynom: (Butterworth)

$$p_{WB} = \underbrace{1}_{=p_2} \cdot s^2 + \underbrace{\sqrt{2}}_{=p_1} s + \underbrace{1}_{=p_0}$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{p_0}{p_2} \cdot a_2 - a_0 = 1 - 2 = -1$$

$$k_2 = \frac{p_1}{p_2} \cdot a_2 - a_1 = \sqrt{2} - 2$$

$$k = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} - 2 \end{bmatrix}$$

3e) $T_B^{-1} = [b_y \; Ab_y] \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

NR: $B_y^{-1} \overset{!}{=} \frac{1}{\det(B_y)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

b_y

$A \cdot b_y = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T_R \cdot T_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$