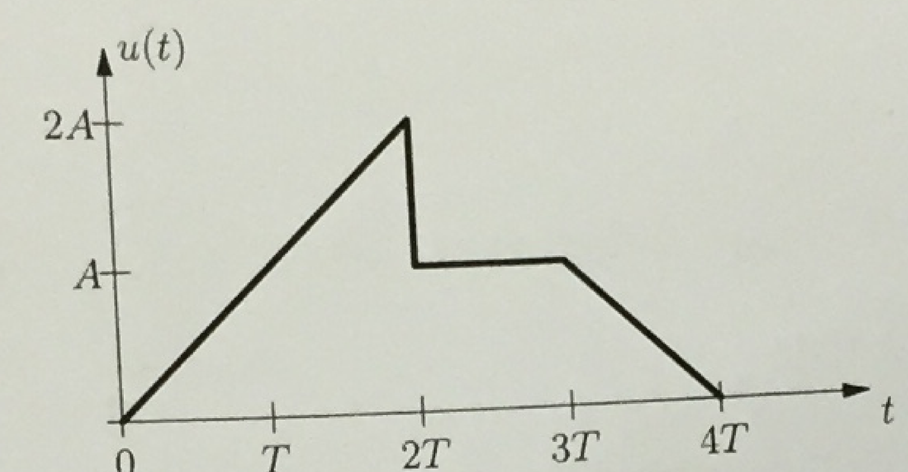
1 Zeitkontinuierliche Signale — 13 Punkte

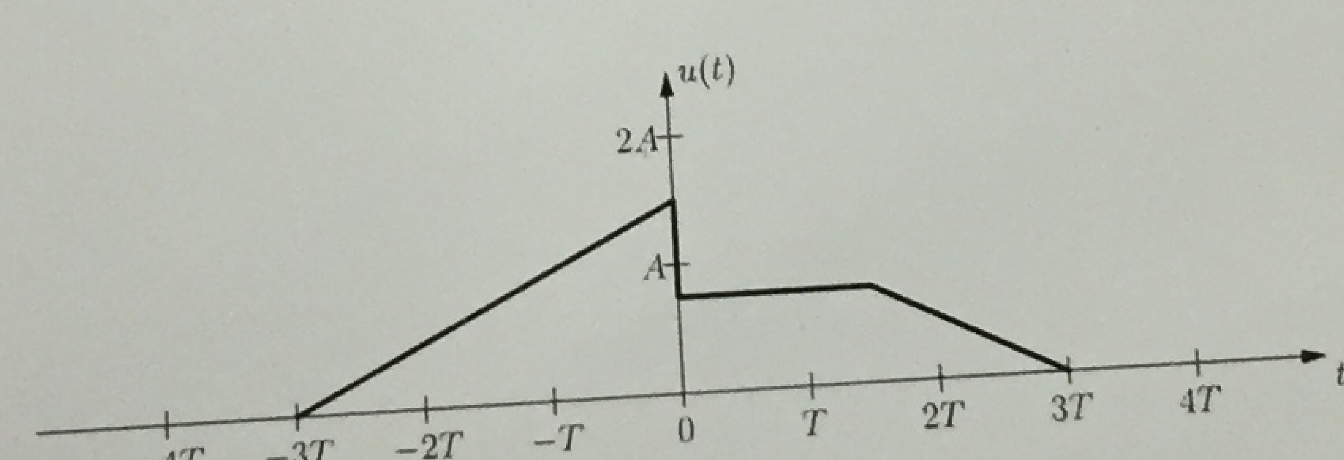
1.1 Gegeben sei das folgende zeitkontinuierliche Signal $u(t)$. — 2 P



a) Geben Sie eine geschlossene mathematische Beschreibung von $u(t)$ unter Zuhilfenahme von Elementarsignalen an. — 1 P

$$u(t) = A \cdot \frac{t}{T} \cdot \sqcap_{2T}(t-T) + A \cdot \sqcap_T(t - \frac{5}{2}T) - A \cdot \left(\frac{t-4T}{T}\right) \cdot \sqcap_T(t - \frac{7}{2}T)$$

b) Skizzieren Sie das Signal $\frac{3}{4}u\left(2\left(\frac{t}{3}+T\right)\right)$ im Bereich $-5T \leq t \leq 5T$. — 1 P



0,5 Punkte für die richtige Skalierung, 0,5 Punkte für die richtige Verschiebung

1.2 Autokorrelation und Kreuzkorrelation — 9 P

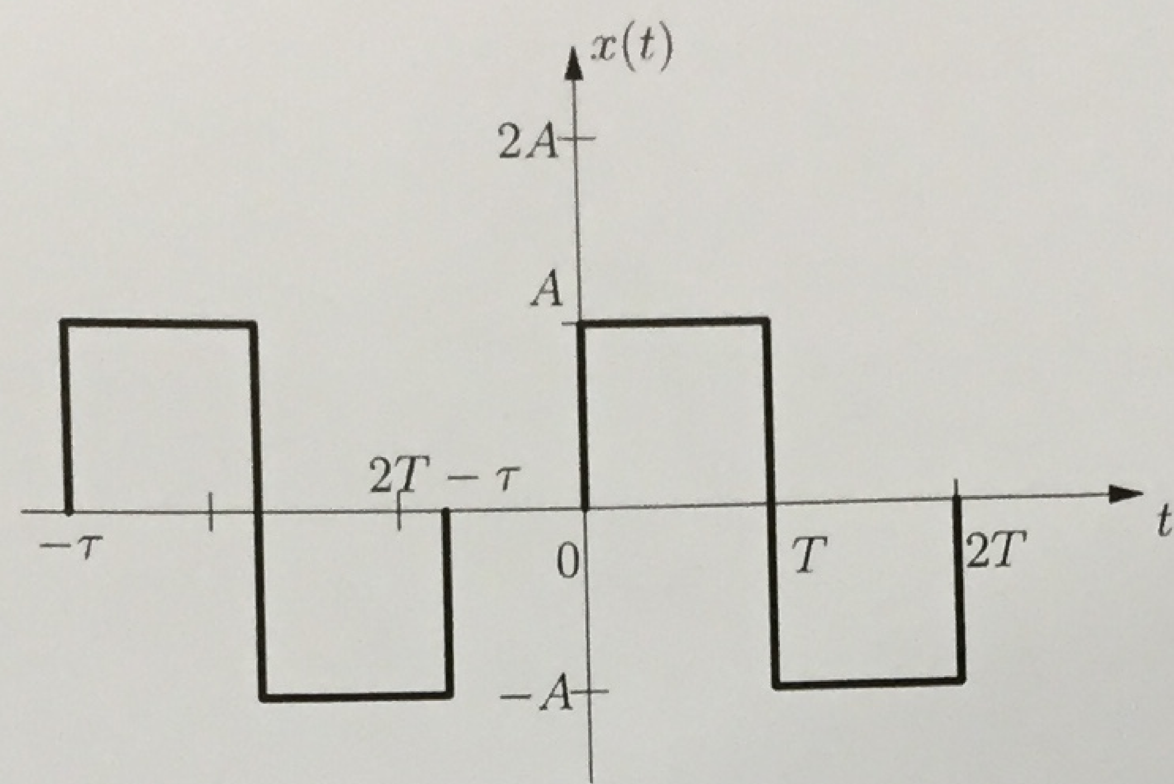
a) Geben Sie die mathematische Definition der Kreuzkorrelationsfunktion $r_{uv}(\tau)$ an. — 1 P

$$r_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot v(t+\tau)dt$$

b) Zeigen Sie, dass für die Autokorrelationsfunktion $r_{uu}(\tau)$ die Symmetriebedingung $r_{uu}(\tau) = r_{uu}(-\tau)$ gilt. — 2 P

$$\begin{aligned} r_{uu}(-\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot u(x-\tau)dx, \ \textbf{Substitution: } t = x - \tau, \ \frac{dt}{dx} = 1 \ \textbf{(1 Punkt)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t+\tau) \cdot u(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot u(t+\tau)dt = r_{uu}(t) \ \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie für das gegebene Signal $x(t)$ die Autokorrelationsfunktion $r_{xx}(\tau)$. 5 P



Fall 1: $-\tau < -2T \Leftrightarrow \tau > 2T: \; r_{xx}(\tau) = 0$

Fall 2: $-2T \leq -\tau < -T \Leftrightarrow T < \tau \leq 2T: \; r_{xx}(\tau) = -\int_0^{2T-\tau} A^2 d\tau$

$= -A^2 \cdot (2T-\tau) = -2A^2T + A^2\tau$ **(0,5 Punkte)**

Fall 3: $-T \leq -\tau < 0 \Leftrightarrow 0 < \tau \leq T: \; r_{xx}(\tau) = \int_0^{T-\tau} A^2 dt - \int_{T-\tau}^{T} A^2 dt + \int_T^{2T-\tau} A^2 dt$

$= A^2(T-\tau) - A^2(T-T+\tau) + A^2(2T-\tau-T)$

$= 2A^2T - 3A^2\tau$ **(0,5 Punkte)**

Fall 4: $0 \leq -\tau < T \Leftrightarrow -T < \tau \leq 0: \; r_{xx}(\tau) = \int_{-\tau}^{T} A^2 dt - \int_T^{T-\tau} A^2 dt + \int_{T-\tau}^{2T} A^2 dt$

$= A^2(T+\tau) - A^2(T-\tau-T) + A^2(2T-T+\tau)$

$= A^2(2T+3\tau)$ **(0,5 Punkte)**

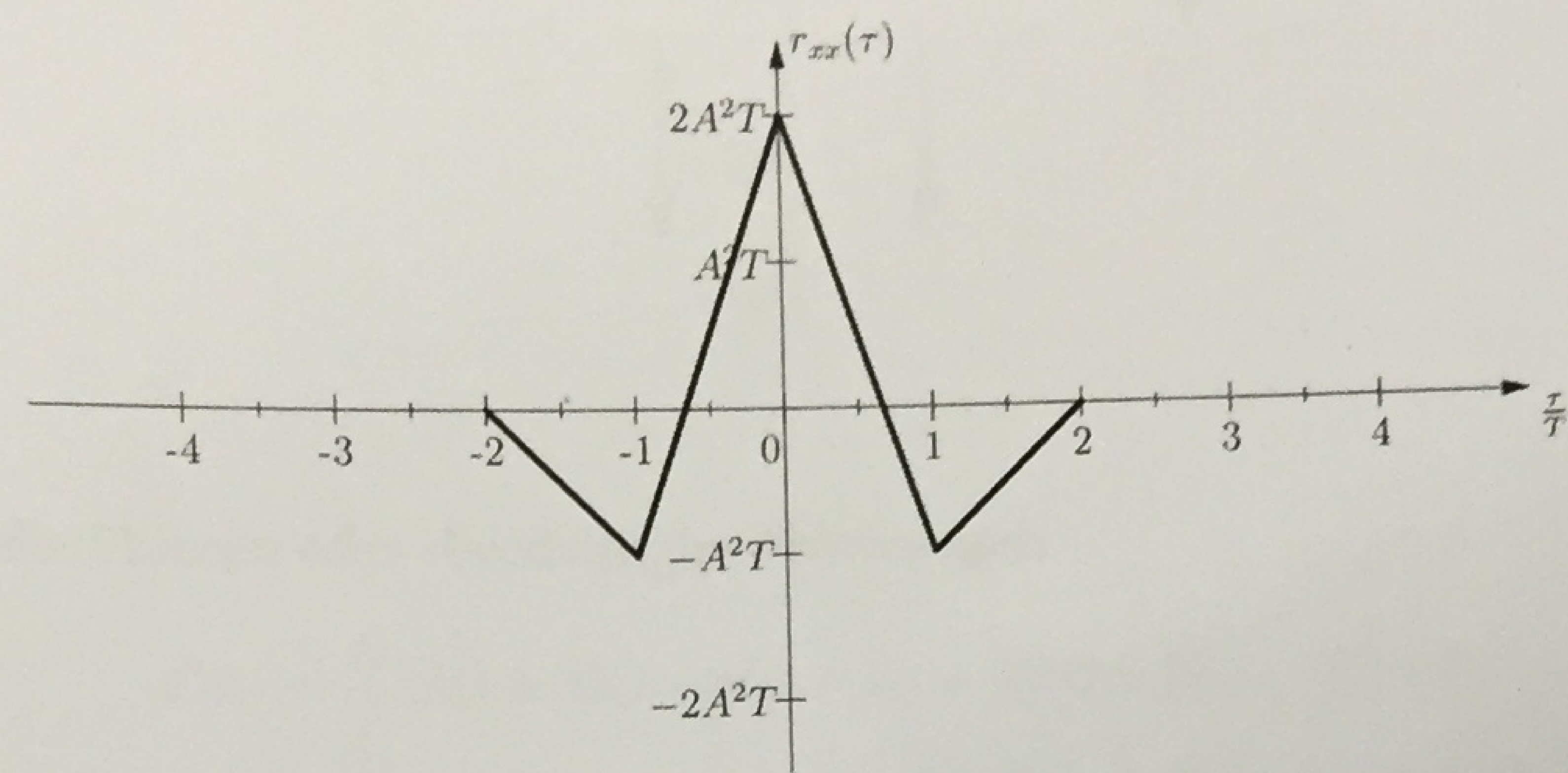
Fall 5: $T < -\tau \leq 2T \Leftrightarrow -2T \leq \tau < -T: r_{xx}(\tau) = \int_{-\tau}^{2T} -A^2 dt = -A^2(2T+\tau)$

$= -2A^2T - A^2\tau$ **(0,5 Punkte)**

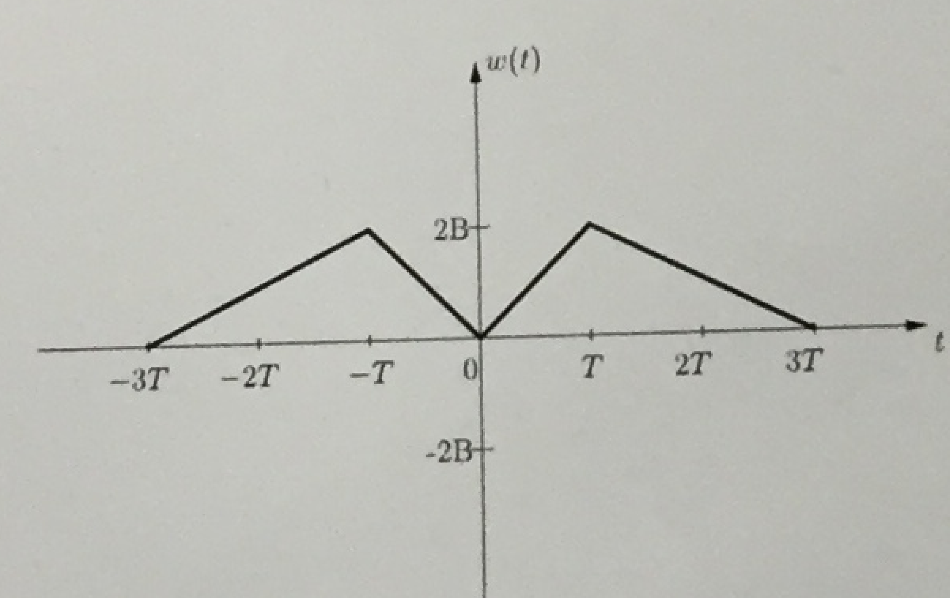
Fall 6: $\tau < -2T: \; r_{xx}(\tau) = 0$

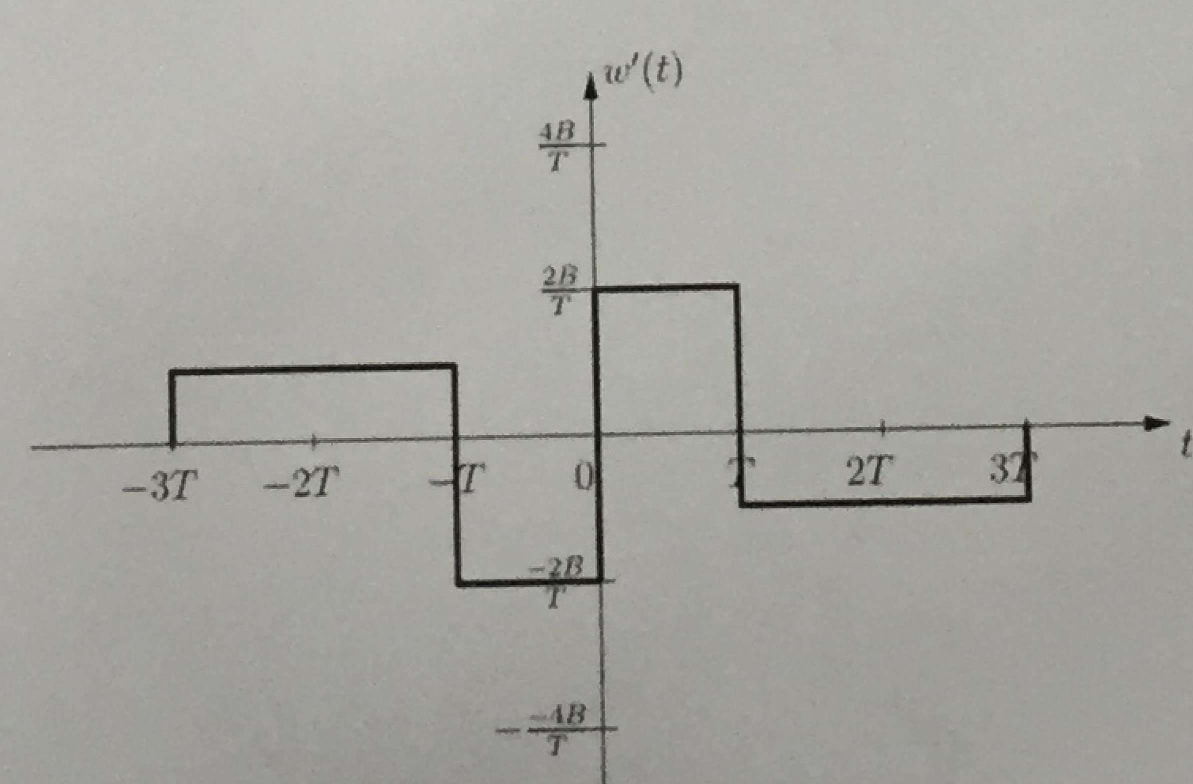
Zusätzlich jeweils 0,5 Punkte auf die richtigen Bereichsgrenzen.

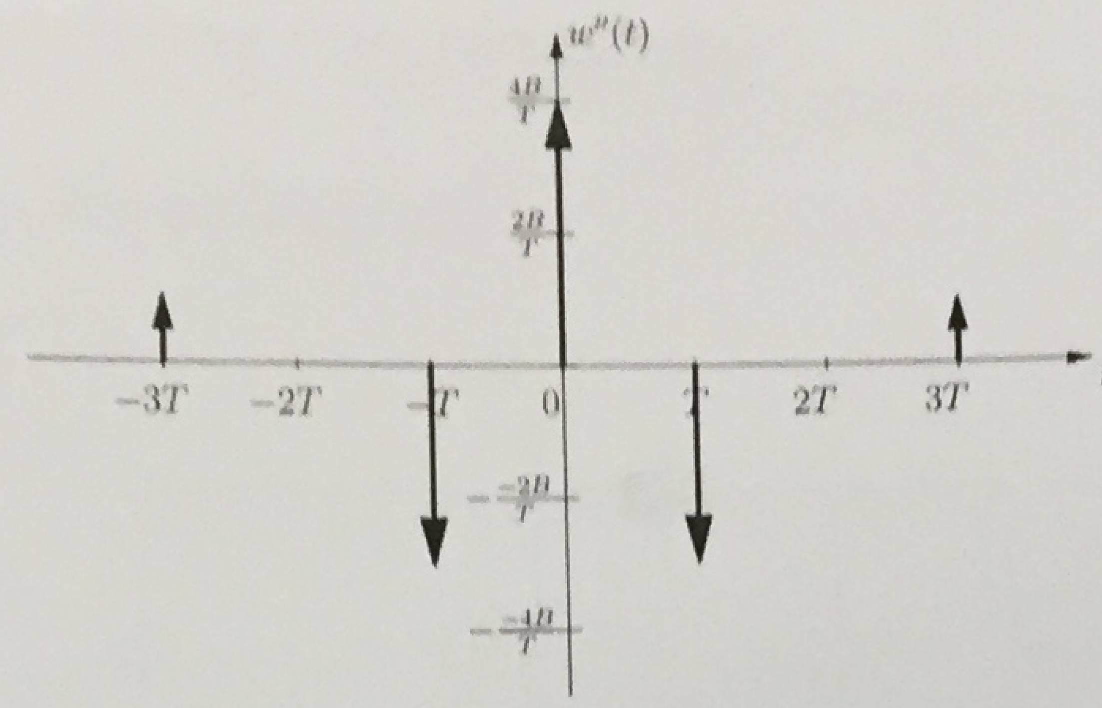
d) Skizzieren Sie $r_{xx}(\tau)$ im Bereich $-4T \leq \tau \leq 4T$. **1 P**



1.3 Gegeben sei das folgende Signal $w(t)$. Bestimmen Sie die Fouriertransformierte des Signals mit Hilfe der Derivierten. Fassen Sie alle e-Funktionsterme so weit wie möglich zu trigonometrischen Funktionen zusammen. **2 P**







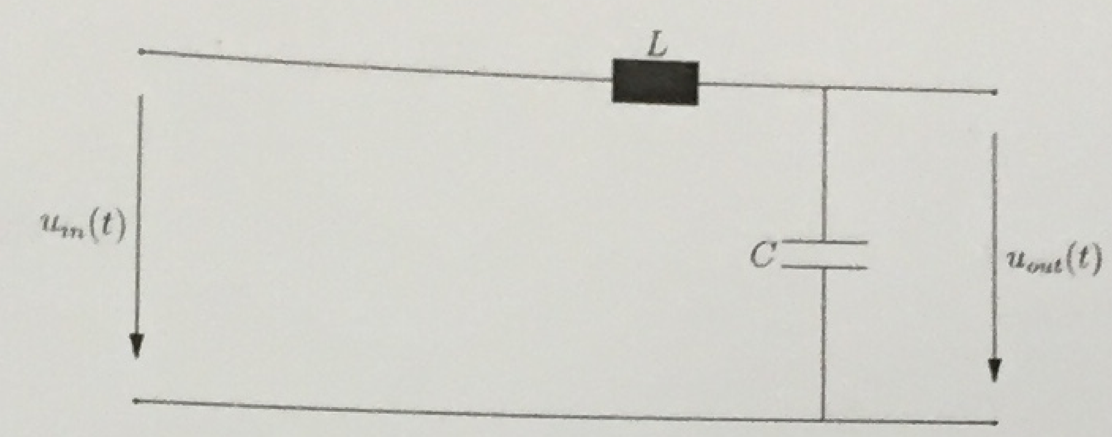
1 Punkt für die Skizzen oder die richtigen Ableitungen

$$
\begin{aligned}
w''(t) &= \frac{B}{T}\left(\delta(t+3T) - 3\delta(t+T) + 4\delta(t) - 3\delta(t-T) + \delta(t-3T)\right)\\
(j\omega)^2 \cdot W(j\omega) &= \frac{B}{T}\left(e^{j3\omega T} - 3e^{j\omega T} + 4 - 3e^{j\omega T} + e^{-j3\omega T}\right) \quad \textbf{(0,5 Punkte)}\\
W(j\omega) &= -\frac{B}{\omega^2 T}\left(4 - e\left(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}\right) e^{j3\omega T} + e^{-j3\omega T}\right)\\
&= -\frac{B}{\omega^2 T}\left(4 - \frac{2\cdot 3}{2}\left(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}\right) + \frac{2}{2}\left(e^{j3\omega T} + e^{-j3\omega T}\right)\right)\\
&= -\frac{B}{\omega^2 T}\left(4 - 6\cdot\cos(\omega T) + 2\cdot\cos(3\omega T)\right) \quad \textbf{(0,5 Punkte)}
\end{aligned}
$$

2 Systembeschreibung und Abtastung

9 Punkte

2.1 Gegeben sei das folgende Netzwerk. 3 P



a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(s)$ des Systems im Laplacebereich unter Verwendung der komplexen Impedanzen. 2 P

$$U_{in}(s) = sL \cdot I(s) + \frac{1}{sC} \cdot I(s),\ I(s) = \frac{U_{out}}{\frac{1}{sC}} = sC \cdot U_{out}(s) \textbf{ (1 Punkt)}$$

$$U_{in}(s) = s^2 LC \cdot U_{out}(s) + U_{out}(s)$$

$$U_{in}(s) = U_{out}(s) \cdot (1 + s^2 LC)$$

$$H(s) = \frac{U_{out}(s)}{U_{in}(s)} = \frac{1}{1 + s^2 LC} \textbf{ (1 Punkt)}$$

b) Geben Sie die Impulsantwort des Systems im Zeitbereich an. 1 P

Hinweis: $\sin(at) \leftrightarrow \frac{a}{s^2+a^2}$

$$H(s) = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{1}{LC} + s^2},\ a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right)$$

2.2 Von einem realen zeitkontinuierlichen System mit 4 Extremstellen (Polstellen und Nullstellen zusammen) seien folgende Eigenschaften bekannt. Skizzieren Sie das dazugehörige PN-Diagramm.

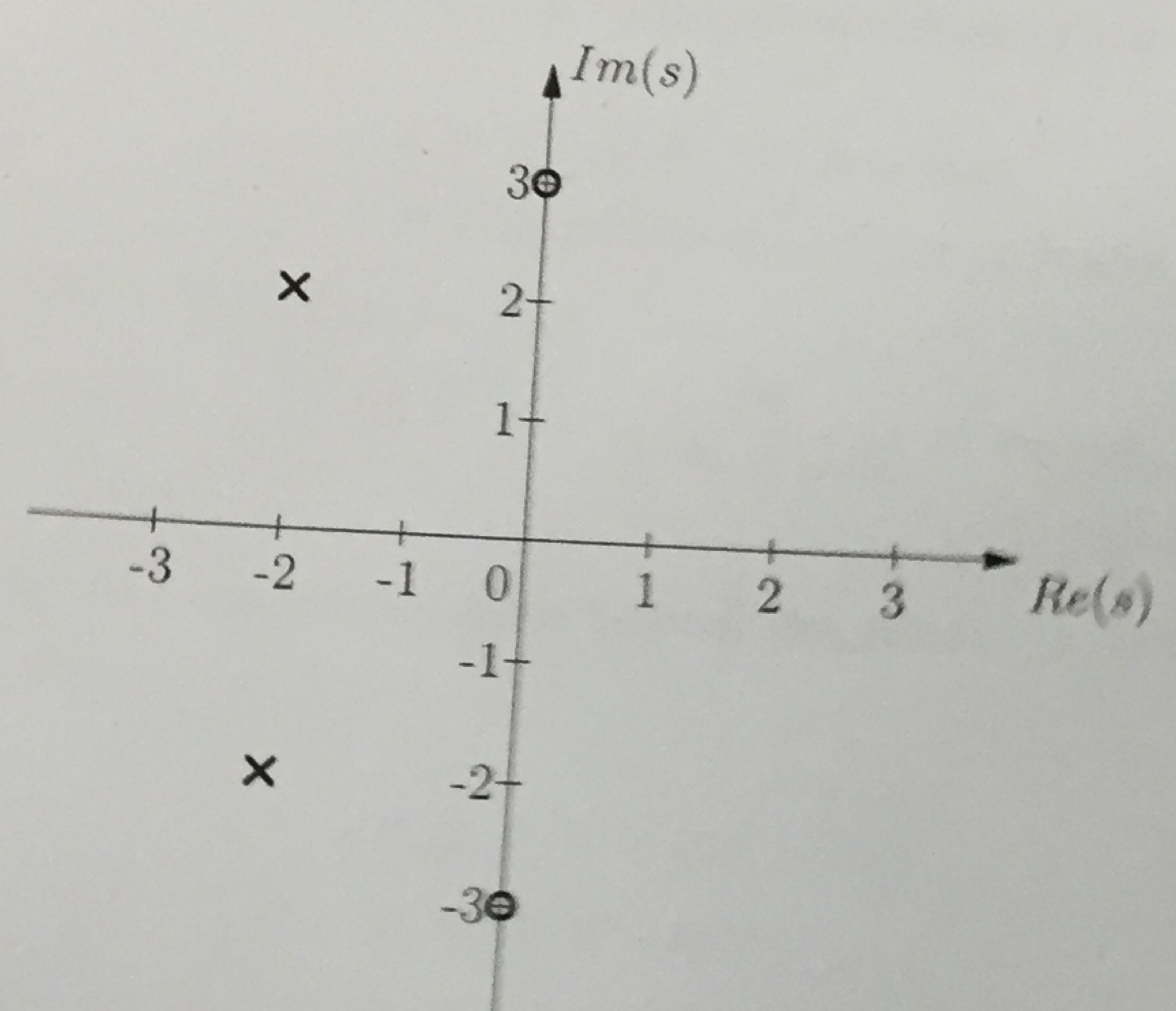
1) $\lim_{\omega \to \infty} |H(j\omega)| = 1$

2) Das System ist stabil.

3) $H(3j) = 0$

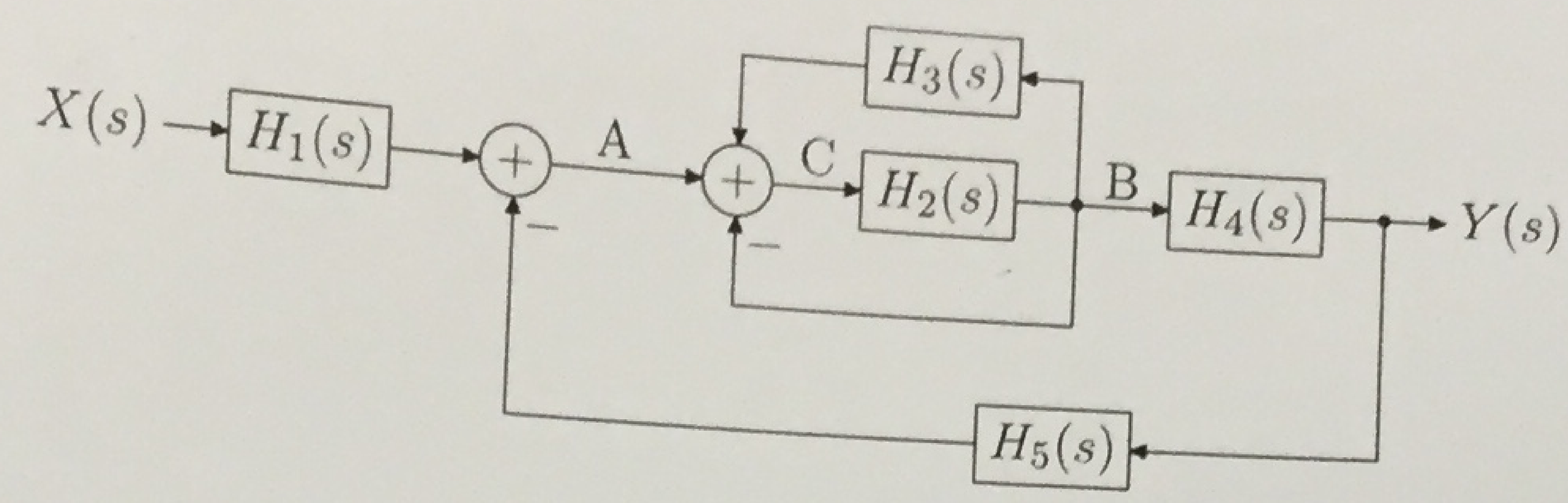
4) Der Imaginärteil einer Polstelle ist 2.

5) $|H(0)| = \frac{9}{8}$



jeweils 1 Punkt für die Pole und 1 Punkt für die Nullstellen

2.3 Gegeben sei das folgende Blockschaltbild. 4 P



a) Fassen Sie das System zwischen den Punkten A und B zu einem Teilsystem $H_6(s)$ zusammen. Geben Sie $H_6(s)$ in Abhängigkeit von $H_2(s)$ und $H_3(s)$ an. 2 P

$$\begin{aligned} C &= A + H_3B - B,\ B = H_2C \\ B &= H_2A + (H_2H_3 - H_2)B \textbf{ (1 Punkt)} \\ B(1 + H_2 - H_2H_3) &= H_2A \\ H_6 &= \frac{B}{A} = \frac{H_2}{1 + H_2 - H_2H_3} \textbf{ (1 Punkt)} \end{aligned}$$

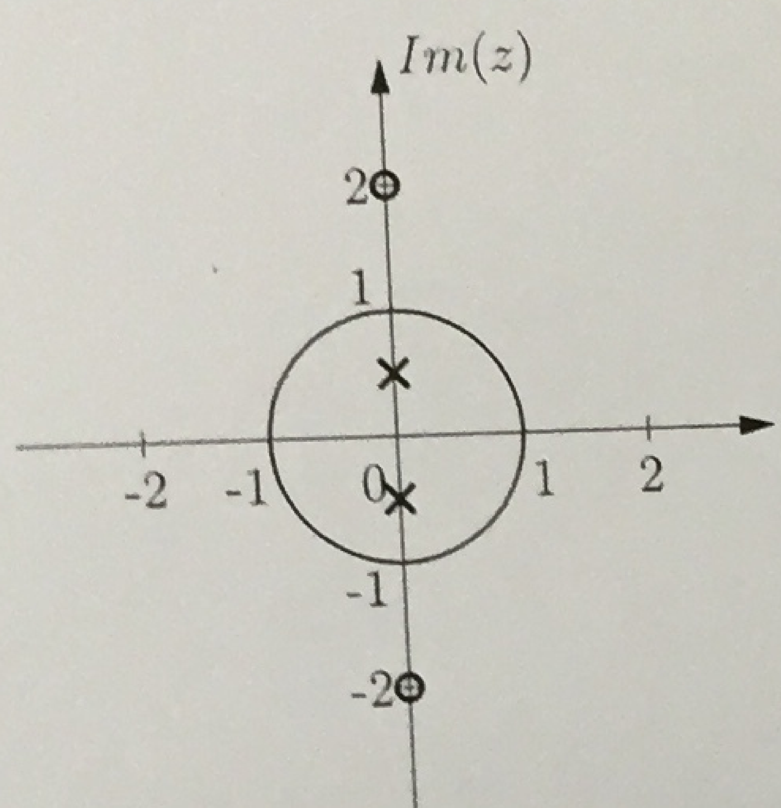
b) Bestimmen Sie die Gesamtübertragungsfunktion des Systems in Abhängigkeit von $H_1(s),\ldots,H_5(s)$. 2 P

$$\begin{aligned} Y &= H_4H_6A,\ A = H_1X - H_5Y \\ Y &= H_4H_6(H_1X - H_5Y) \\ Y &= H_1H_4H_6X - H_4H_5H_6Y \\ Y(1 + H_4H_5H_6) &= H_1H_4H_6X \textbf{ (1 Punkt)} \\ H_{ges} &= \frac{Y}{X} = \frac{H_1H_4H_6}{1 + H_4H_5H_6} \\ &= \frac{H_1H_4\frac{H_2}{1+H_2-H_2H_3}}{1 + H_4H_5\frac{H_2}{1+H_2-H_2H_3}} \\ &= \frac{H_1H_2H_4}{1 + H_2 - H_2H_3 + H_2H_4H_5} \textbf{ (1 Punkt)} \end{aligned}$$

3 Zeitdiskrete Signale und Systeme **10 Punkte**

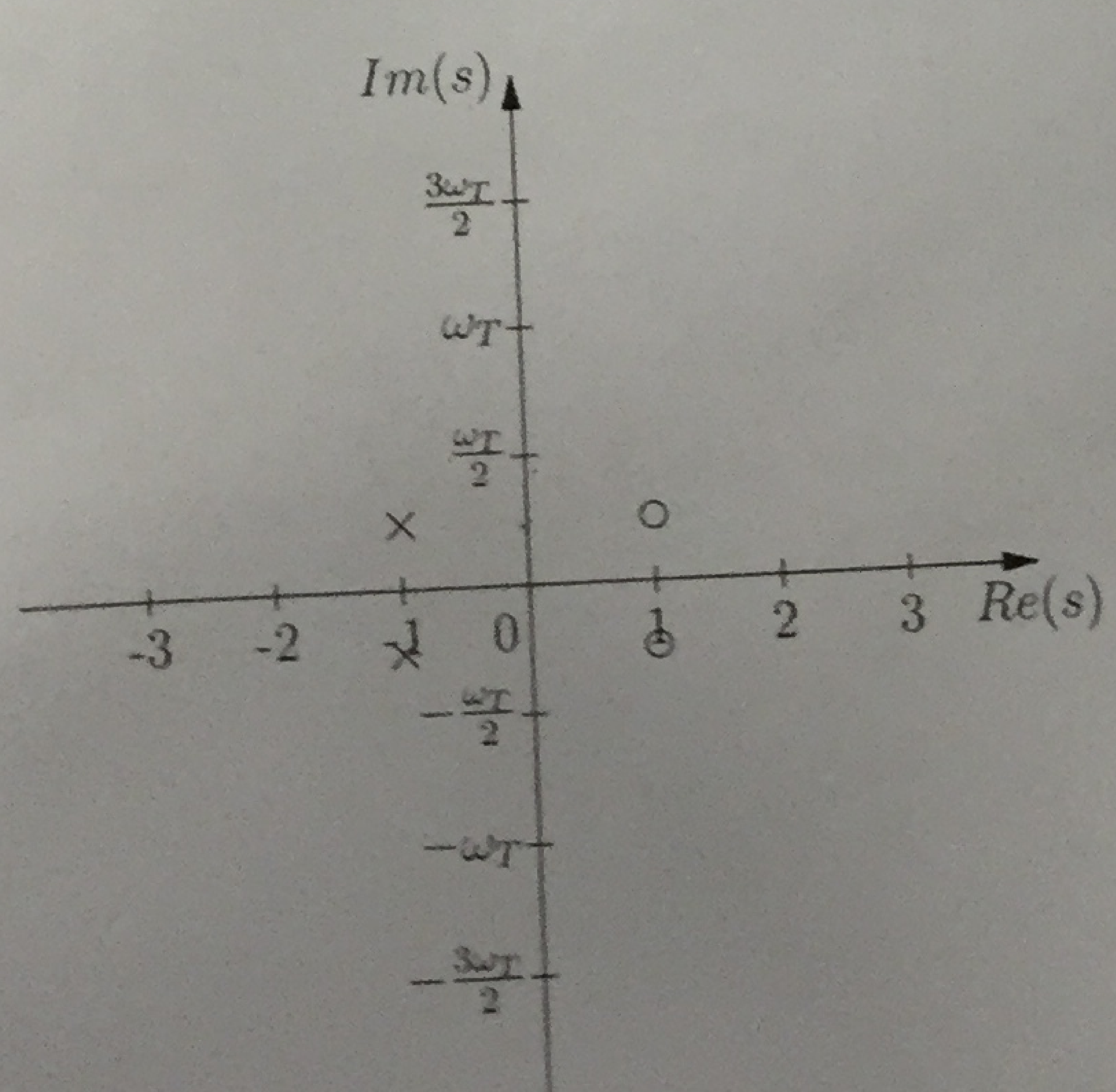
3.1 PN-Diagramme zeitdiskreter Systeme 4 P

a) Gegeben sei das folgende PN-Diagramm eines zeitdiskreten Systems. Kreuzen Sie rechts die entsprechenden Eigenschaften des Systems an. 3 P

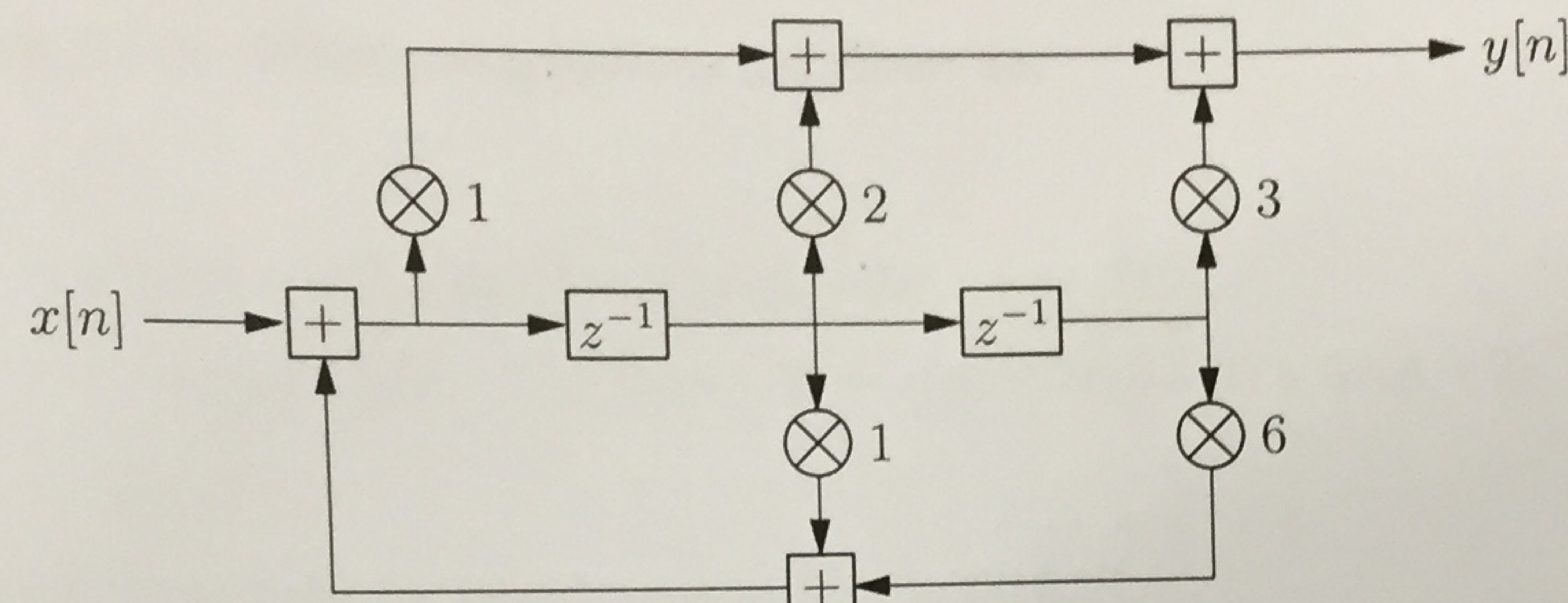


ja	nein	
☒	☐	reellwertig
☒	☐	(bedingt) stabil
☒	☐	kausal
☐	☒	linearphasig
☒	☐	Allpass
☐	☒	minimalphasig

b) Skizzieren Sie weiterhin im untenstehenden Koordinatensystem die PN-Verteilung des entsprechenden zeitkontinuierlichen Systems vor der Abtastung. 1 P



3.2 Gegeben sei das folgende zeitdiskrete Filter. 4 P



a) Geben Sie die Systemfunktion $H(z)$ des Filters an. 1 P

$$
\begin{aligned}
&Y(z) = Z(z) + 2Z(z)z^{-1} - 3Z(z)z^{-2} = (1 + 2z^{-1} - 3z^{-2})Z(z)\\
&Z(z) = X(z) + Z(z)z^{-1} + 6Z(z)z^{-2}\\
&Z(z)(1 - z^{-1} - 6z^{-2}) = X(z)\\
&Z(z) = \frac{X(z)}{1 - z^{-1} - 6z^{-2}}\\
&\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - z^{-1} - 6z^{-2}} = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^2 - z - 6}
\end{aligned}
$$

b) Bestimmen Sie die Lage der Pol- und Nullstellen. 1 P

$$z_{o1/2} = -1 \pm \sqrt{1-3} = -1 \pm \sqrt{2}j$$

$$z_{x1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \Rightarrow z_{x1} = 3,\ z_{x2} = -2;$$

c) Handelt es sich um ein FIR- oder ein IIR-Filter? Begründen Sie ihre Entscheidung. 1 P

Wegen der Rückkopplung handelt es sich um ein IIR-Filter.

d) Geben Sie die Differenzengleichung des Filters an. 1 P

$$Y(z)(1 - z^{-1} - 6z^{-2}) = X(z)(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2})$$
$$\Rightarrow y(n) - y(n-1) - 6y(n-2) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2)$$

3.3 Ein FIR Filter habe die Impulsantwort $h(n) = \{1, 0, 2\}$ 2 P

a) Bestimmen Sie die Antwort des Filters auf das Eingangssignal $x(n) = \{1, -2, -1\}$ mittels zeitdiskreter Faltung. 1 P

$$y(n) = \{1, -2, 1, -4, -2\}$$

b) Bestimmen Sie das Ergebnis der Faltung (im Zeitbereich) aus $x(n)$ und $h(n)$ falls diese mit Hilfe einer 3-Punkte-DFT im Frequenzbereich berechnet werden würde. 1 P

Das Ergebnis der zyklischen Faltung ist:

$$y(n) = \{-1, -5, 0\}$$