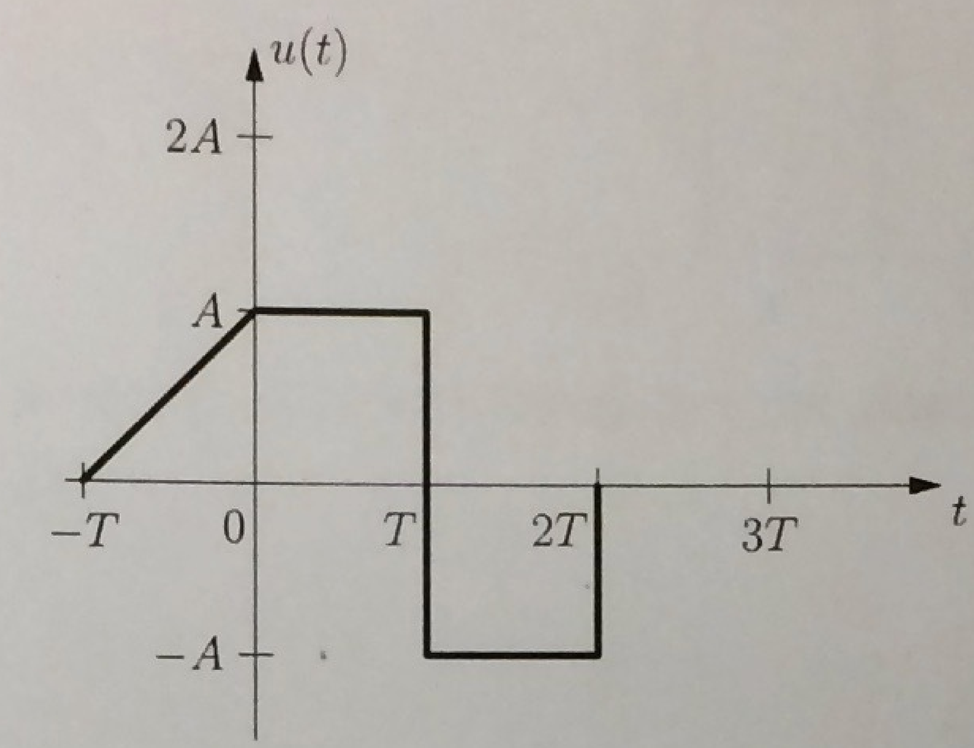
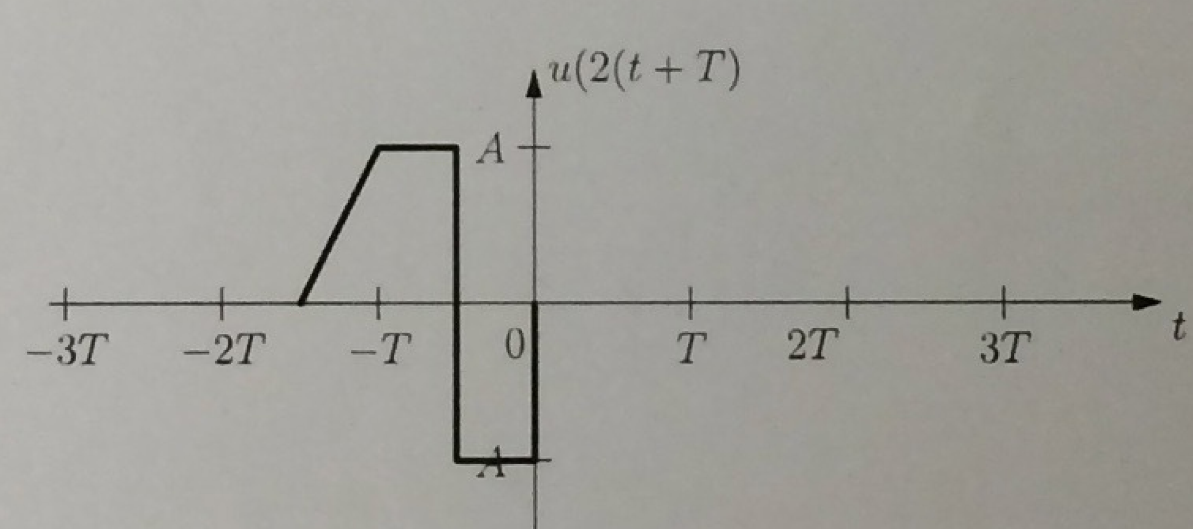
1 Zeitkontinuierliche Signale

12 Punkte

1.1 Gegeben sei das folgende zeitkontinuierliche Signal $u(t)$. 1,5 P

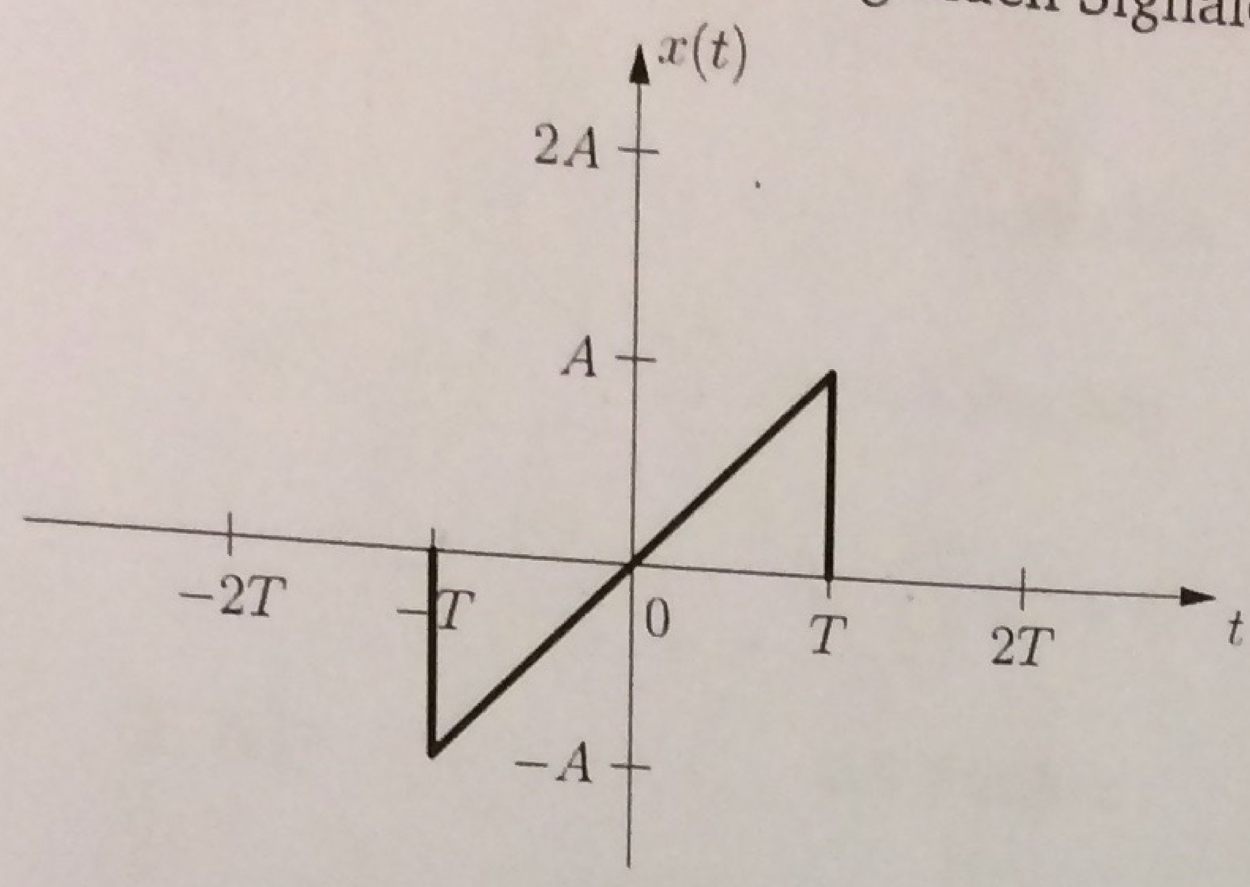


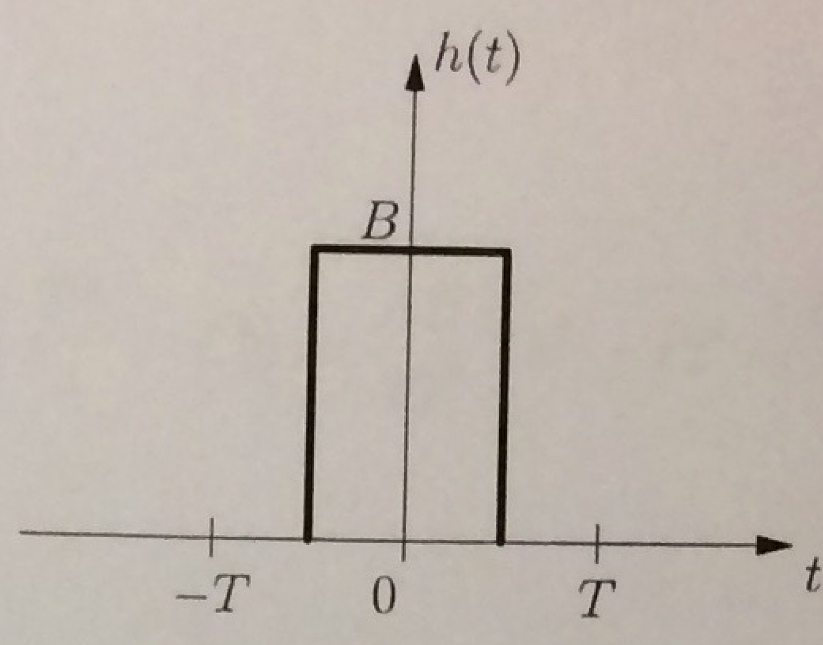
a) Skizzieren Sie das Signal $w(t) = u(2(t+T))$ 1,5 P



0,5 Punkte für die richtige Skalierung
1 Punkt für die richtige Verschiebung

1.2 Gegeben seien die folgenden Signale $x(t)$ und $h(t)$. 6,5 P





a) Berechnen Sie die Antwort $y(t)$ eines Filters mit der Impulsantwort $h(t)$ auf das Eingangssignal $x(t)$. 4,5 P

Fall 1: $t < -\frac{3T}{2} : y(t) = 0$

Fall 2: $-\frac{3T}{2} \leq t < -\frac{T}{2}:$ **0,5 Punkte**

$$y(t) = \int_{-T}^{t+\frac{T}{2}} \frac{AB}{T}\tau d\tau \text{ } \textbf{0,5 Punkte}$$

$$= \left[\frac{AB}{2T}\tau^2\right]_{-T}^{t+\frac{T}{2}} = \frac{AB}{2T}(t^2 + tT + \frac{T^2}{4} - T^2) = \frac{AB}{2T}\left(t^2 + tT - \frac{3T^2}{4}\right) \text{ } \textbf{0,5 Punkte}$$

3. Fall: $-\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}:$ **0,5 Punkte**

$$y(t) = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{AB}{T}\tau d\tau \text{ } \textbf{0,5 Punkte}$$

$$= \left[\frac{AB}{T}\tau^2\right]_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{AB}{2T}\left(t^2 + tT + \frac{T^2}{4} - t^2 + tT - \frac{T^2}{4}\right)$$

$$= ABt \text{ } \textbf{0,5 Punkte}$$

4. Fall: $\frac{T}{2} \leq t < \frac{3T}{2}:$ **0,5 Punkte**

$$y(t) = \int_{t-\frac{T}{2}}^{T} \frac{AB}{T}\tau d\tau \text{ } \textbf{0,5 Punkte}$$

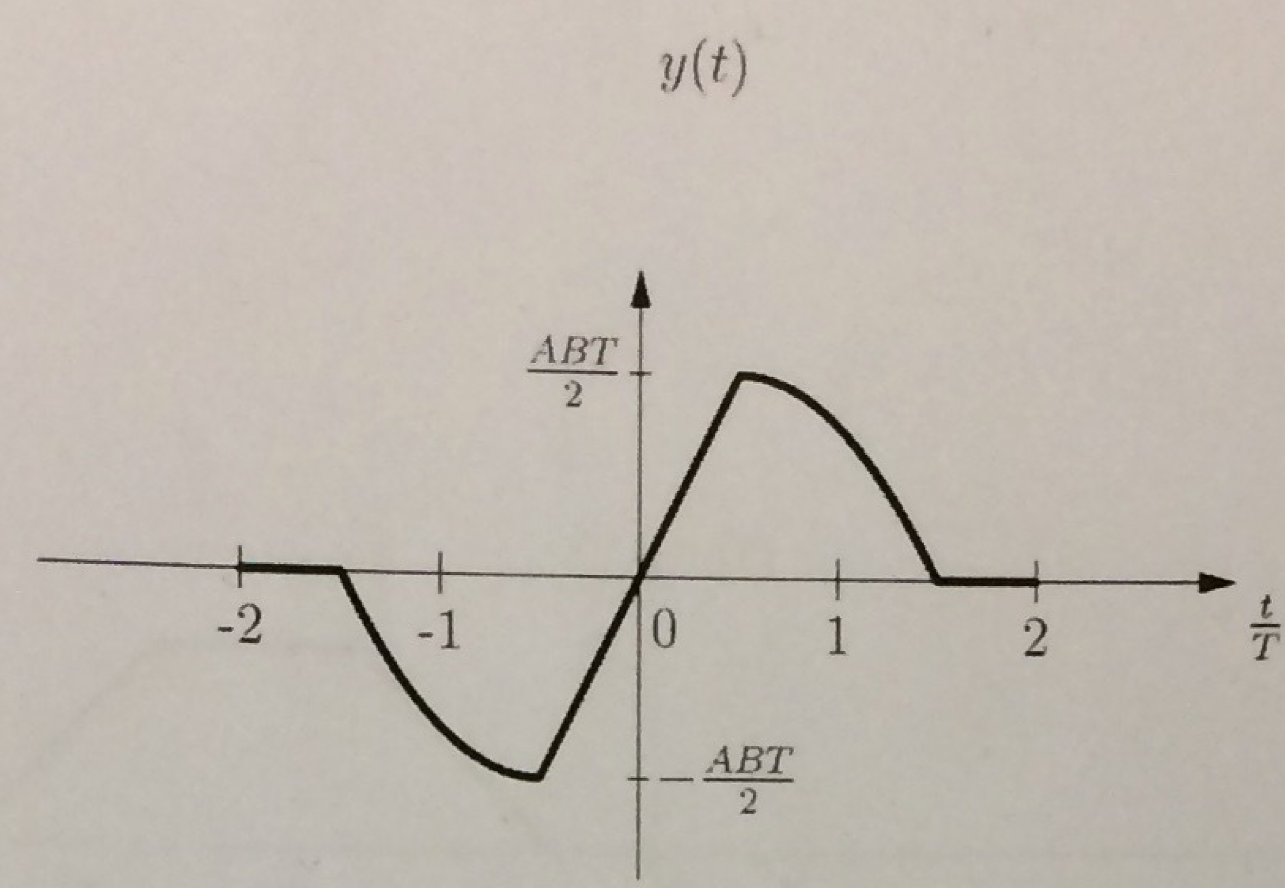
$$= \left[\frac{AB}{2T}\tau^2\right]_{t-\frac{T}{2}}^{T}$$

$$= \frac{AB}{2}\left(T^2 - t^2 + tT - \frac{T^2}{4}\right)$$

$$= \frac{AB}{2T}\left(-t^2 + tT + \frac{3T^2}{4}\right) \text{ } \textbf{0,5 Punkte}$$

Fall 5: $\frac{3T}{2} \leq t : y(t) = 0$

b) Skizzieren Sie $y(t)$ im Bereit $-3T \leq t \leq 3T$. 2 P

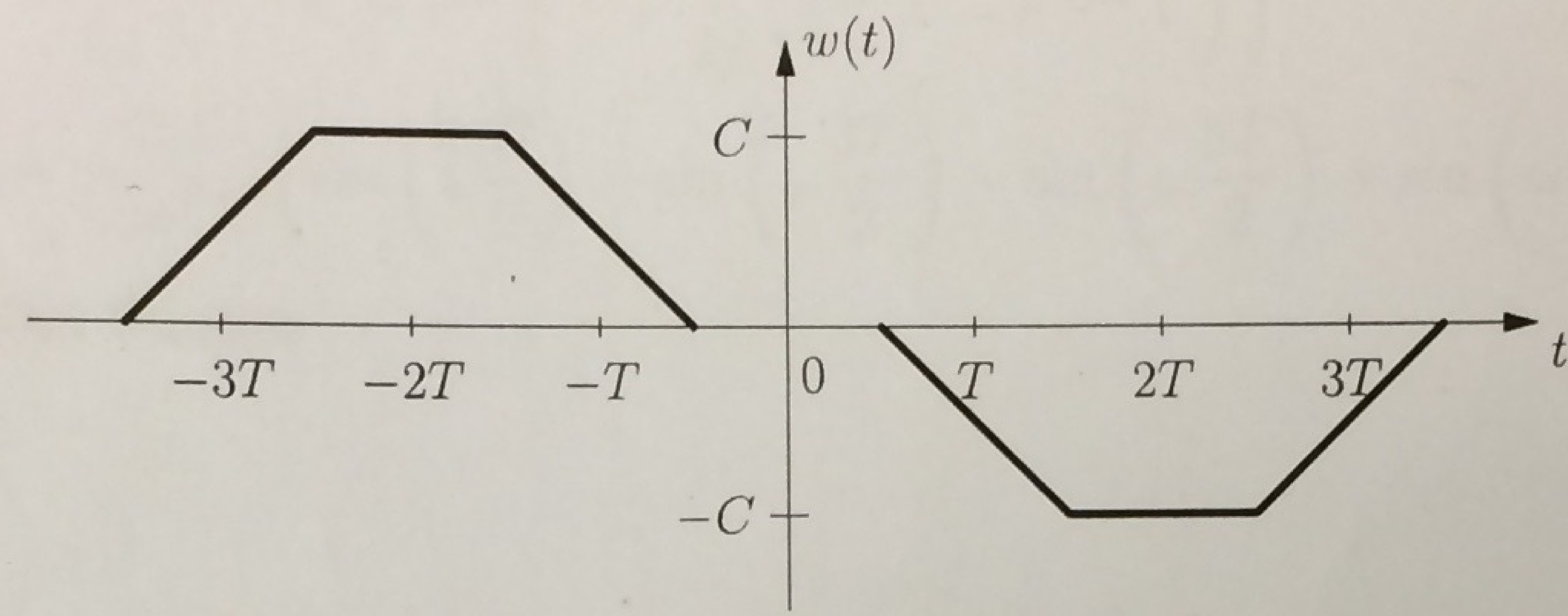


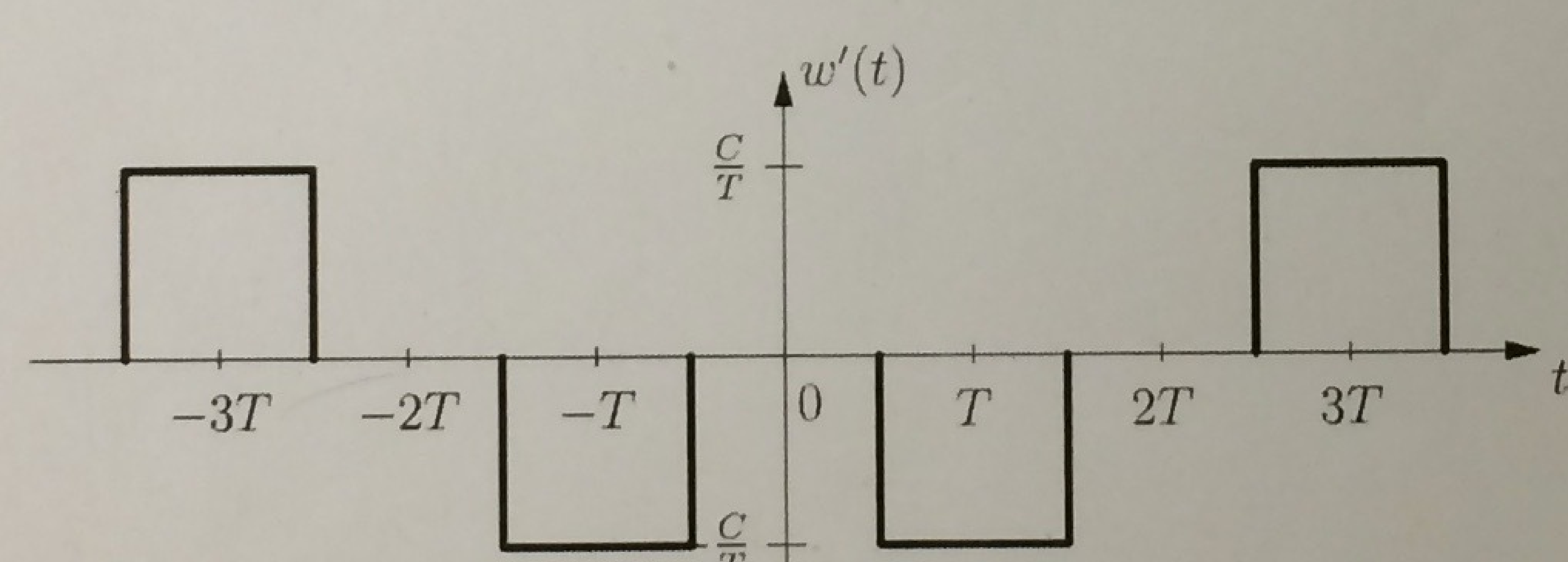
1 Punkt für die richtigen Nullstellen

0,5 Punkte für die maximale Amplitude

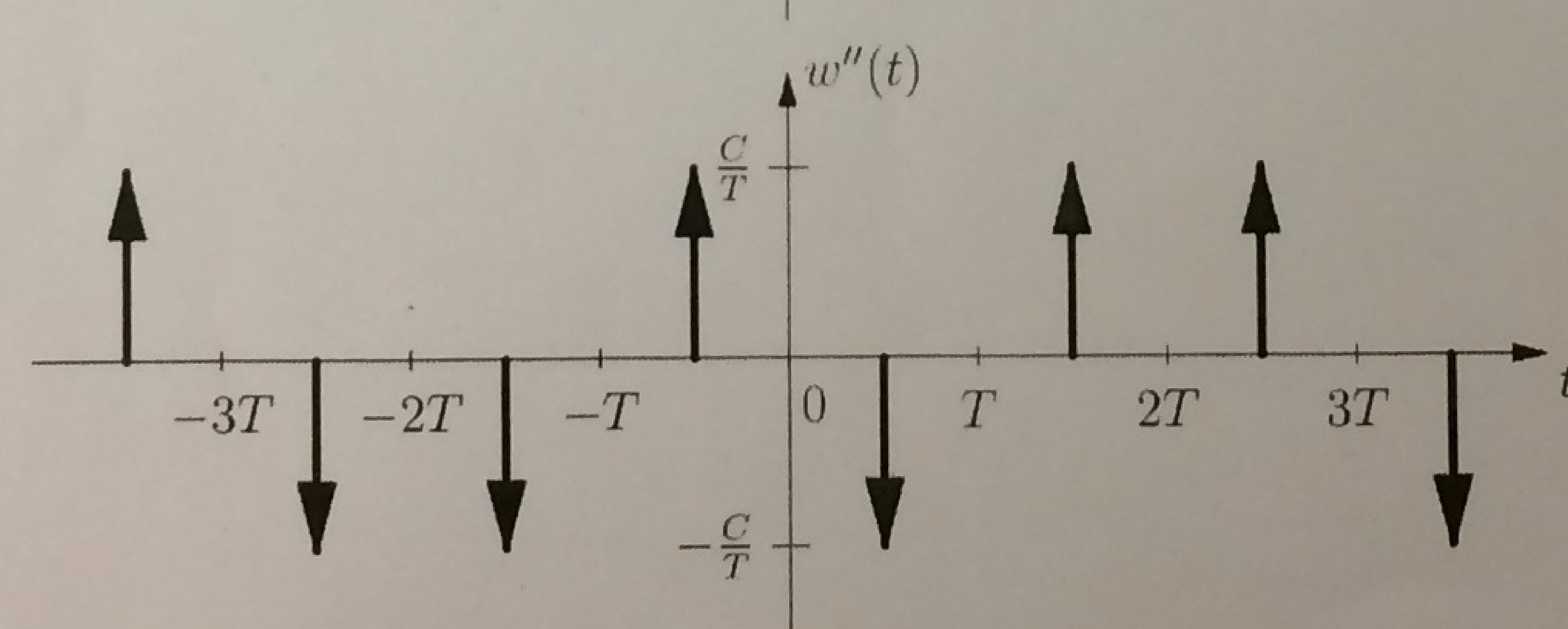
0,5 Punkte für den Kurvenverlauf

1.3 Berechnen Sie die Fouriertransformierte des folgenden Signals. Fassen Sie das Ergebnis soweit wie möglich zu trigonometrischen Funktionen zusammen. 2 P





0,5 Puntke



0,5 Punkte

$$
\begin{aligned}
w''(t) = \frac{C}{T}\Bigg(&\delta\left(t+\frac{T}{2}\right) - \delta\left(t-\frac{T}{2}\right) - \delta\left(t+\frac{3T}{2}\right) + \delta\left(t-\frac{3T}{2}\right) \\
&-\delta\left(t+\frac{5T}{2}\right) + \delta\left(t-\frac{5T}{2}\right) + \delta\left(t+\frac{7T}{2}\right) - \delta\left(t-\frac{7T}{2}\right)\Bigg) \\
(j\omega)^2 W(j\omega) = \frac{C}{T}&\left(e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}} - e^{j\omega\frac{3T}{2}} + e^{j\omega\frac{3T}{2}} - e^{j\omega\frac{5T}{2}} + e^{j\omega\frac{5T}{2}} + e^{j\omega\frac{7T}{2}} - e^{-j\omega\frac{7T}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

0,5 Punkte

$$
\begin{aligned}
-\omega^2 W(j\omega) = \frac{C}{T}\Bigg(&\frac{2j}{2j}\left(e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}\right) - \frac{2j}{2j}\left(-e^{j\omega\frac{3T}{2}} + e^{j\omega\frac{3T}{2}}\right) \\
&-\frac{2j}{2j}\left(e^{j\omega\frac{5T}{2}} - e^{j\omega\frac{5T}{2}}\right) + \frac{2j}{2j}\left(e^{j\omega\frac{7T}{2}} - e^{-j\omega\frac{7T}{2}}\right)\Bigg) \\
W(j\omega) = -\frac{2jC}{\omega^2 T}&\left(\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right) - \sin\left(\omega\frac{3T}{2}\right) - \sin\left(\omega\frac{5T}{2}\right) + \sin\left(\omega\frac{7T}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

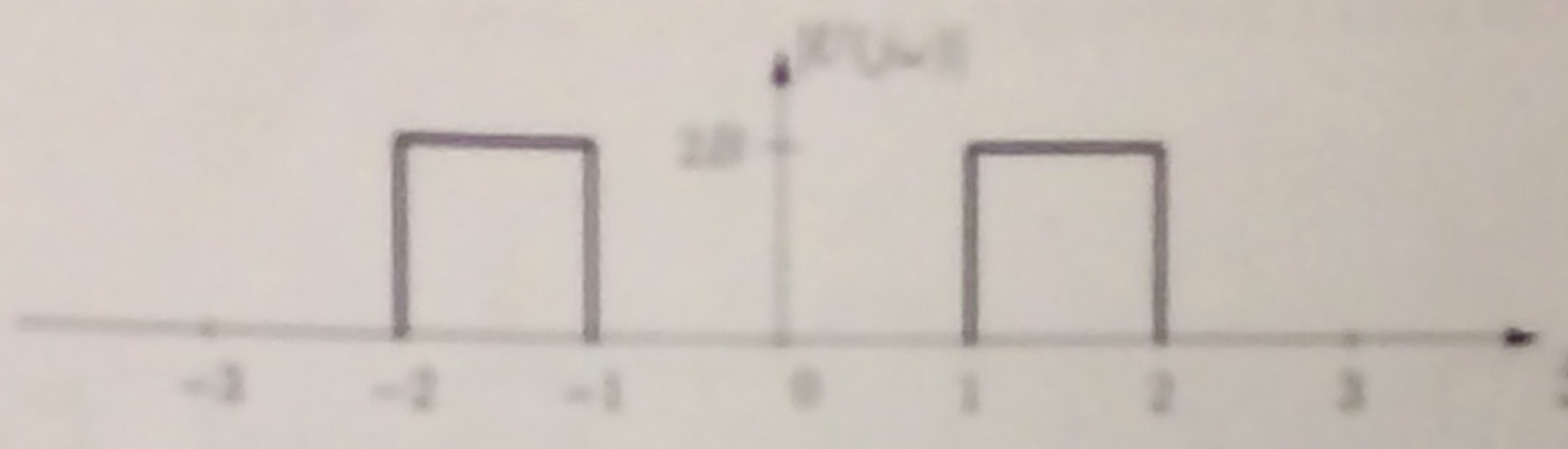
0,5 Punkte

1.4 Beweisen Sie den folgenden Zusammenhang $\mathbb{F}\{r_{uu}(t)\} = U(j\omega)U^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t}dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{j\omega t}dt$. *Hinweis: Nutzen Sie den Verschiebungssatz der Fouriertransformation!* 2* P

$$
\begin{aligned}
\mathbb{F}\{r_{uu}(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} r_{uu}(t) \cdot e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)u(x+t)dx \cdot e^{-j\omega t}dt \textbf{1 Punkt} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\int_{-\infty}^{\infty} u(x+t) \cdot e^{-j\omega t}dtdx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u(x)U(j\omega) \cdot e^{j\omega x}dx \\
&= U(j\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot e^{j\omega x}dx = U(j\omega) \cdot U^*(j\omega) \textbf{1 Punkt}
\end{aligned}
$$

2 Zeitkontinuierliche Systeme und Abtastung — 10 Punkte

2.1 Gegeben sei das folgende Spektrum eines zeitkontinuierlichen Signals. **5 P**



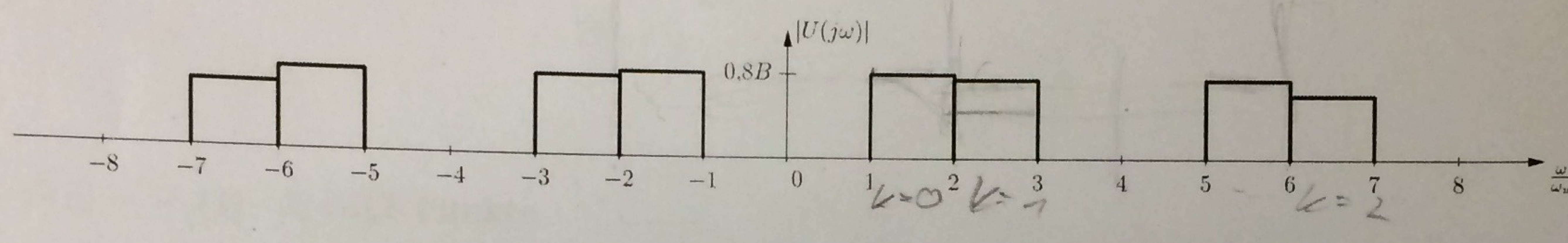
a) Berechnen Sie das entsprechende Signal $u(t)$ im Zeitbereich mittels inverser Fouriertransformation. *Hinweis: Das Phasenspektrum ist $\varphi(\omega) = 0$.* **2 P**

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-2\omega_0}^{-\omega_0} 2Be^{j\omega t}\,d\omega + \int_{\omega_0}^{2\omega_0} 2Be^{j\omega t}\,d\omega\right) \quad \textbf{0,5 Punkte} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{2B}{jt}e^{j\omega t}\right]_{-2\omega_0}^{-\omega_0} + \left[\frac{2B}{jt}e^{j\omega t}\right]_{\omega_0}^{2\omega_0}\right) \quad \textbf{0,5 Punkte} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{2B}{jt}\left(e^{-j\omega_0 t} - e^{-j2\omega_0 t} + e^{j2\omega_0 t} - e^{j\omega_0 t}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{4B}{t}\left(-\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right) + \frac{1}{2j}\left(e^{j2\omega_0 t} - e^{-j2\omega_0 t}\right)\right) \\
&= \frac{4B}{2\pi t}\left(\sin(2\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t)\right) \quad \textbf{1 Punkt}
\end{aligned}
$$

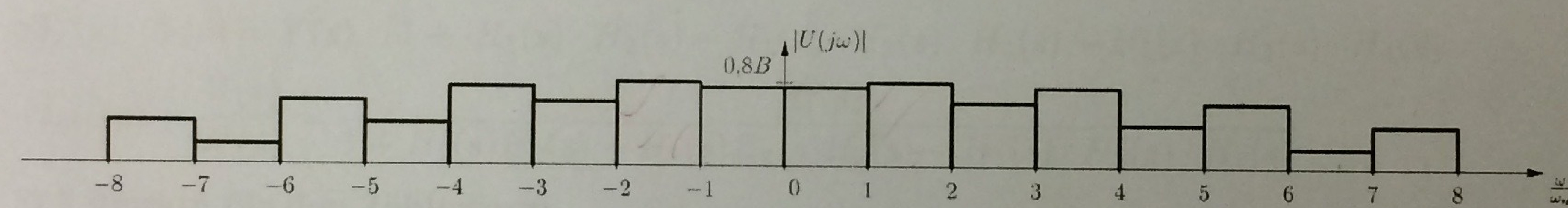
b) Das Signal $u(t)$ werde ideal abgetastet. Welche Abtastfrequenz ist dazu nach dem Nyquist-Theorem mindestens notwendig? **1 P**

$$\omega_T = 4\omega_u \Leftrightarrow f_T = \frac{2\omega_u}{\pi}$$

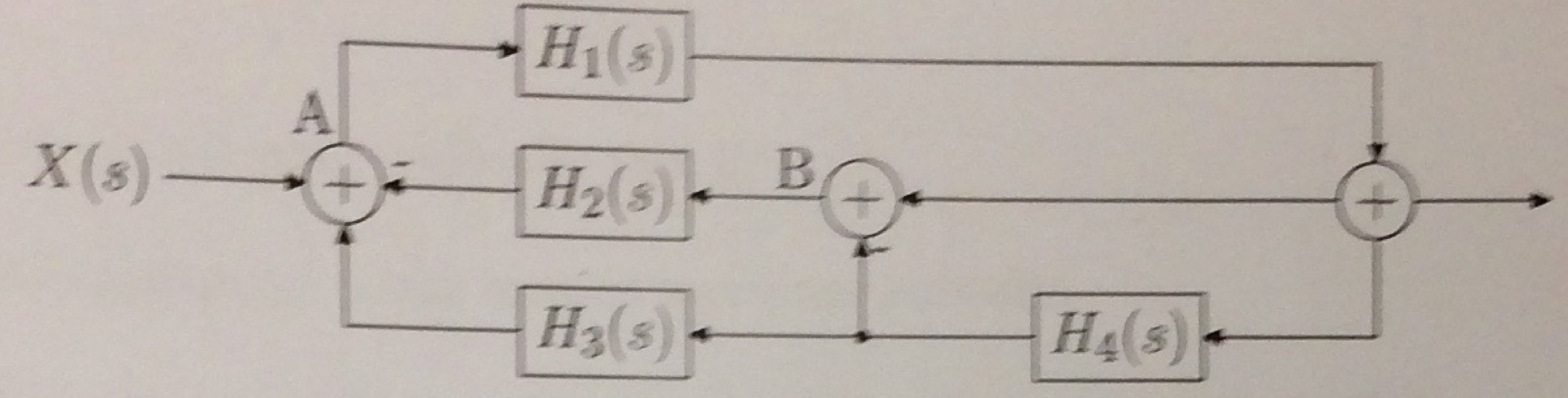
c) Nun werde das Signals mittels Shape-Top-Sampling ($\omega_T = 4\omega_u$, $\alpha = 0{,}4$) abgetastet. Skizzieren Sie das Spektrum des abgetasteten Signals im Bereich $-8\omega_u \leq \omega \leq 8\omega_u$. **1 P**



d) Nun sei $\omega_T = 2\omega_u$. Skizzieren Sie auch hiefür das Spektrum des abgetasteten Signals nach dem Shape-Top-Sampling im Bereich $-8\omega_u \leq \omega \leq 8\omega_u$. **1 P**



2.2 Gegeben sei das folgende Blockschaltbild. Geben Sie die Gesamtübertragungsfunktion $H_{ges}(s)$ in Abhängigkeit von den Einzelübertragungsfunktionen $H_i(s)$, $i = 1, \ldots, 4$, an. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zusammen. **2,5 P**



$Y(s) = H_1(s) \cdot A(s)$**0,5 Punkte**

$A(s) = X(s) + H_3(s) \cdot H_4(s) \cdot Y(s) - H_2(s) \cdot B(s)$**0,5 Punkte**

$B(s) = Y(s) - H_4(s) \cdot Y(s)$**0,5 Punkte**

$A(s) = X(s) + H_3(s) \cdot H_4(s) \cdot Y(s) - H_2(s) \cdot Y(s) + H_2(s) \cdot H_4(s) \cdot Y(s)$

$Y(s) = H_1(s) \cdot X(s) + H_1(s) \cdot H_3(s) \cdot H_4(s) \cdot Y(s) - H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot Y(s) + H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_4(s) \cdot Y(s)$

$H_1(s) \cdot X(s) = Y(s) \cdot (1 + -H_1(s) \cdot H_2(s) - H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_4(s) \cancel{+} - H_1(s) \cdot H_3(s) \cdot H_4(s)$

$$H_{ges}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s) - H_1(s)H_2(s)H_4(s) - H_1(s) \cdot H_3(s) \cdot H_4(s)}$$

0,5 Punkte für den Zählerterm

0,5 Punkte für den Nennerterm

2.3 Von einem realen zeitkontinuierlichen System mit 5 Extremstellen (Pol- und Nullstellen zusammen) seien die folgenden Eigenschaften bekannt. Skizzieren Sie das PN-Diagramm des Systems. Geben Sie weiterhin zu jeder Extremstelle an, aus welchen Eigenschaften sie resultiert. 2,5 P

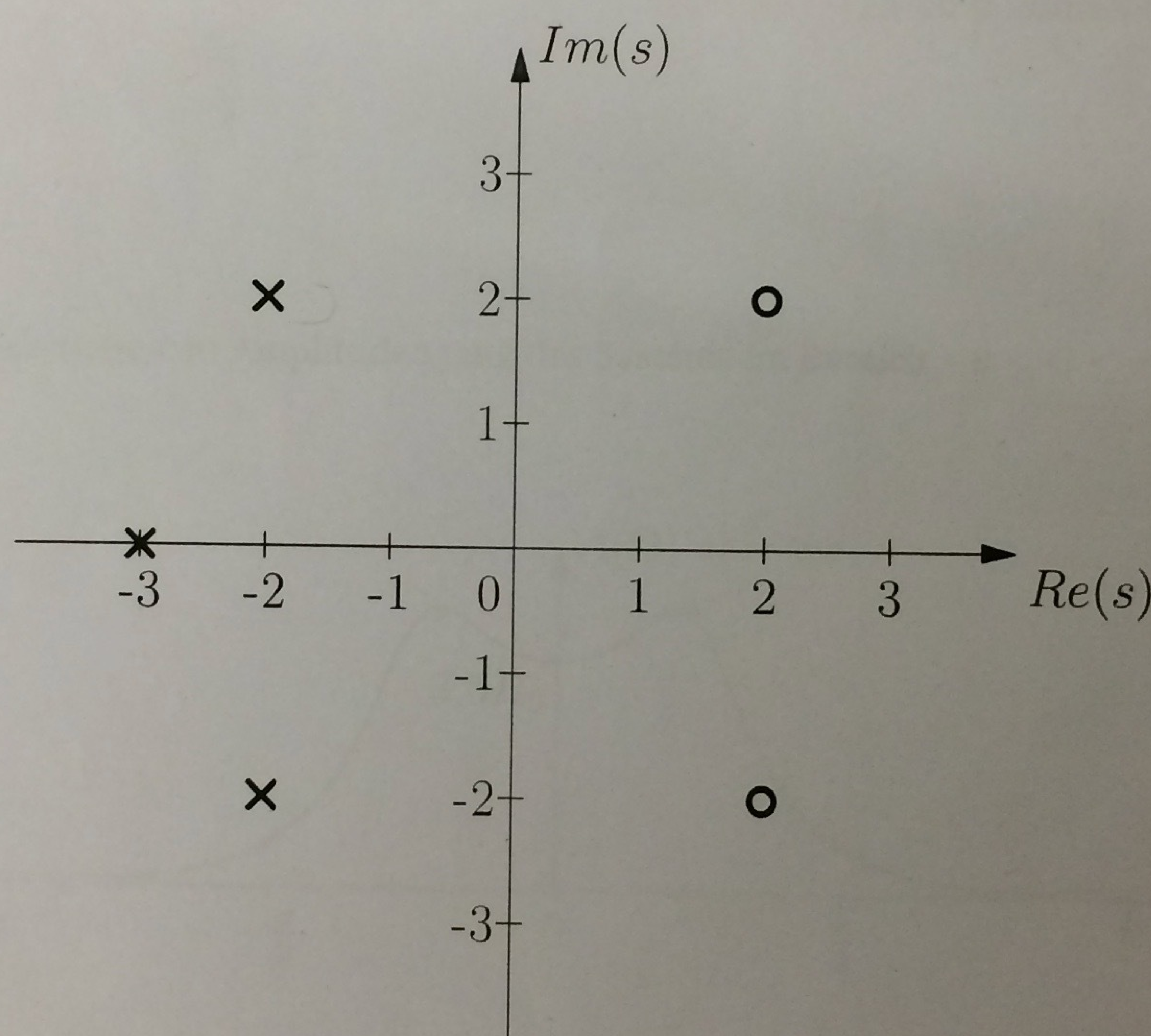
a) Der Imaginärteil einer Nullstelle sein 2.

b) Der minimalphasige Anteil besteht aus einer Polstelle.

c) Der Allpassanteil besitzt mindestens eine Polstelle mit dem Realteil -2.

d) $|H(0)| = \frac{1}{3}$, $H_0 = 1$.

e) Das System ist stabil.



0,5 Punkte je Extremstelle

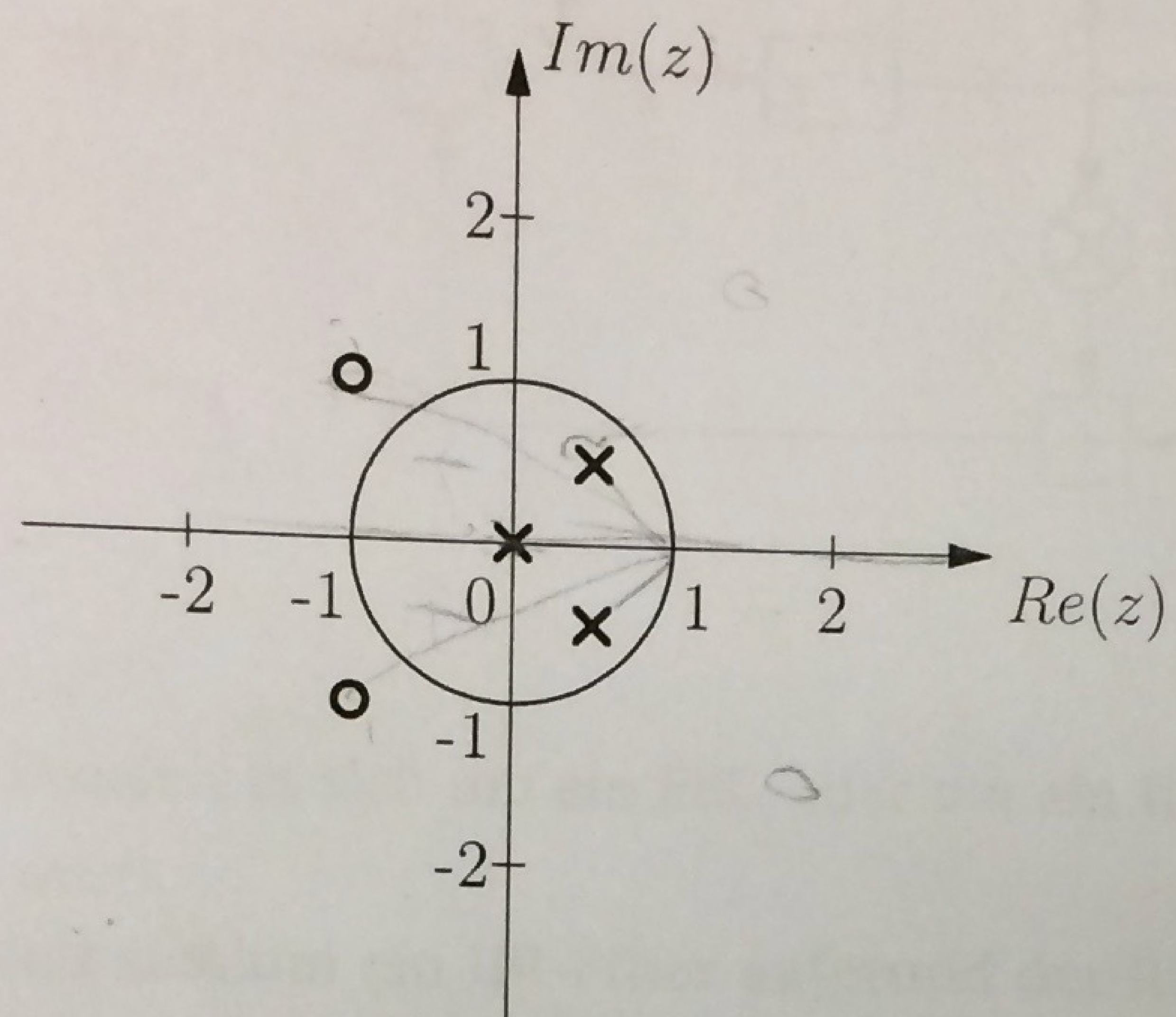
3 Zeitdiskrete Signale und Systeme

10 Punkte

3.1 PN-Diagramme zeitdiskreter Systeme

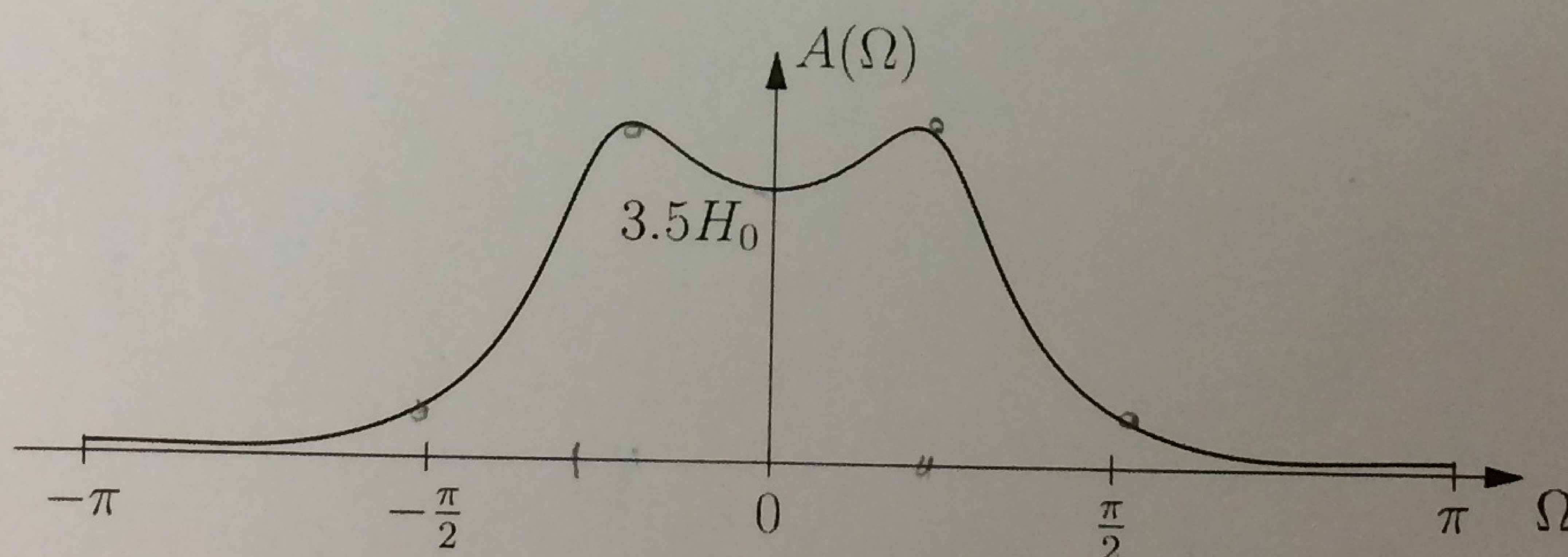
4 P

a) Gegeben sei das folgende PN-Diagramm eines zeitdiskreten Systems. Kreuzen Sie rechts die entsprechenden Eigenschaften des Systems an. 3 P



ja	nein	
☒	☐	reellwertig
☒	☐	(bedingt) stabil
☒	☐	kausal
☐	☒	linearphasig
☐	☒	Allpass
☐	☒	minimalphasig

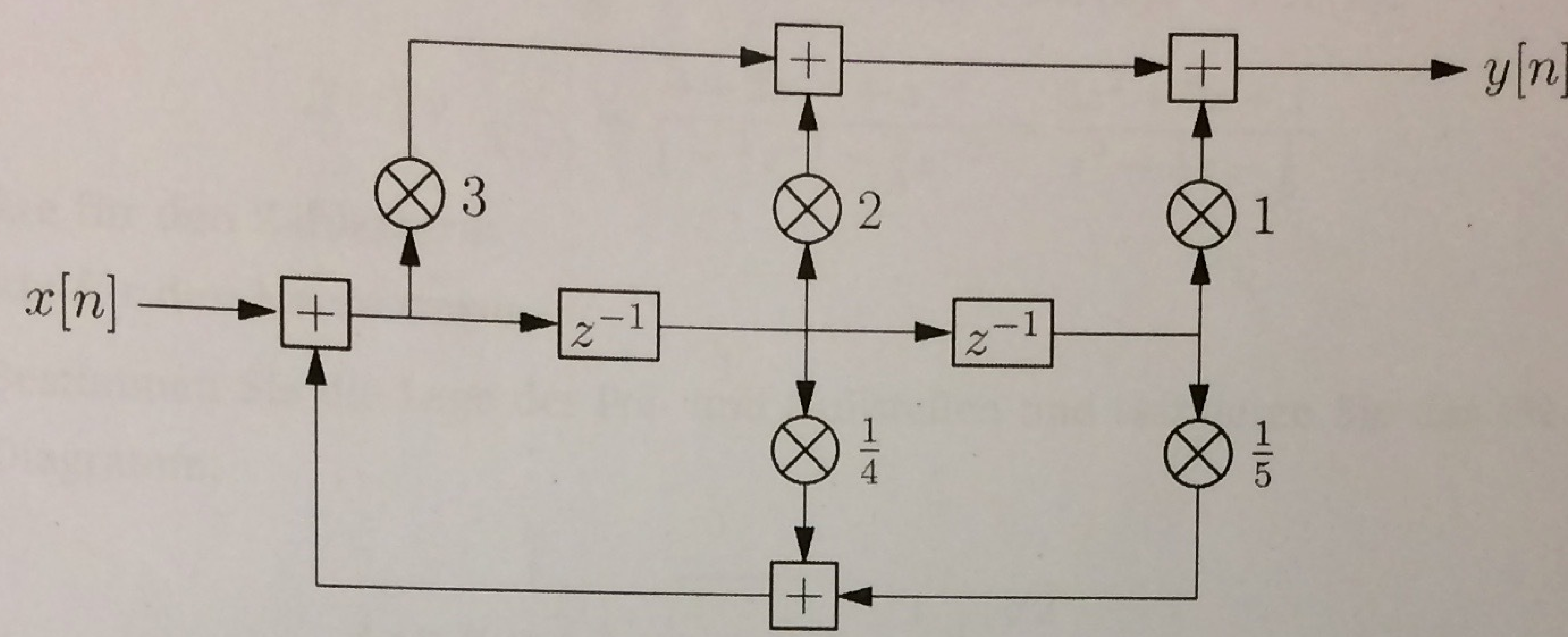
b) Skizzieren Sie den Amplitudengang des Systems im Bereich $-\pi \leq \Omega \leq \pi$. 1 P



0,5 Punkte für die Maxima

0,5 Punkte für die Minima

3.2 Gegeben sei das folgende zeitdiskrete Filter. 6 P



a) Handelt es sich um ein FIR- oder um ein IIR-Filter? Begründen Sie Ihre Antwort! 1 P

Es handelt sich um ein IIR-Filter aufgrund der Rückkopplung.

b) Geben Sie die Differenzengleichung des Filters an. 1 P

$$y(n) - \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{1}{5}y(n-2) = 3x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$$

0,5 Punkte für die y-Terme

0,5 Punkte für die x-Terme

c) Geben Sie weiterhin die Systemfunktion des Filters an. 1 P

$$Y(z) - \frac{1}{4}Y(z)z^{-1} - \frac{1}{5}Y(z)z^{-2} = 3X(z) + 2X(z)z^{-1} + X(z)z^{-2}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{5}z^{-2}} = \frac{3z^2 + 2z + 1}{z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{5}}$$

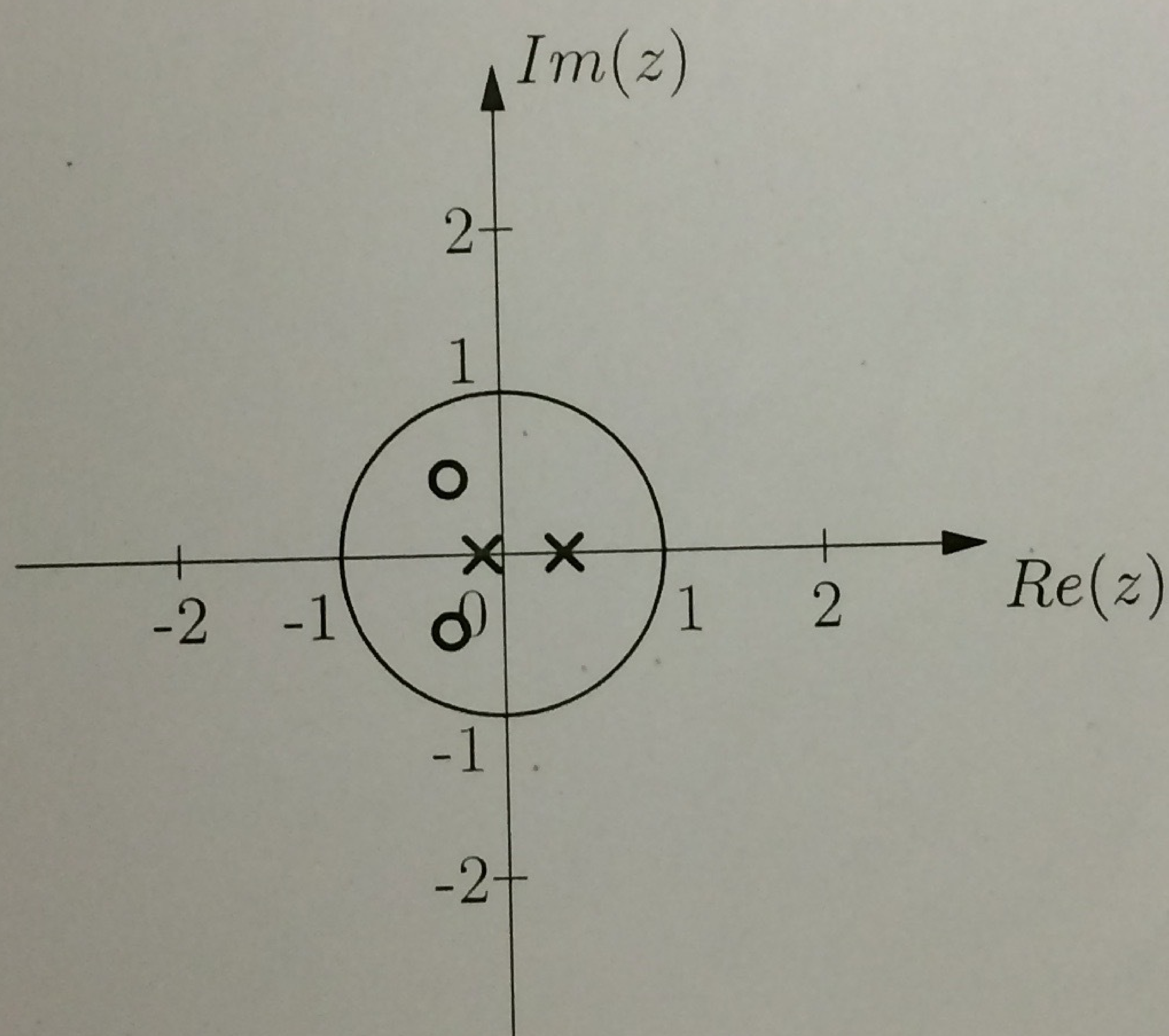
0,5 Punkte für den Zählerterm

0,5 Punkte für den Nennerterm

d) Bestimmen Sie die Lage der Pol- und Nullstellen und skizzieren Sie das PN-Diagramm. 1 P

$$z_{o1/2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}j$$

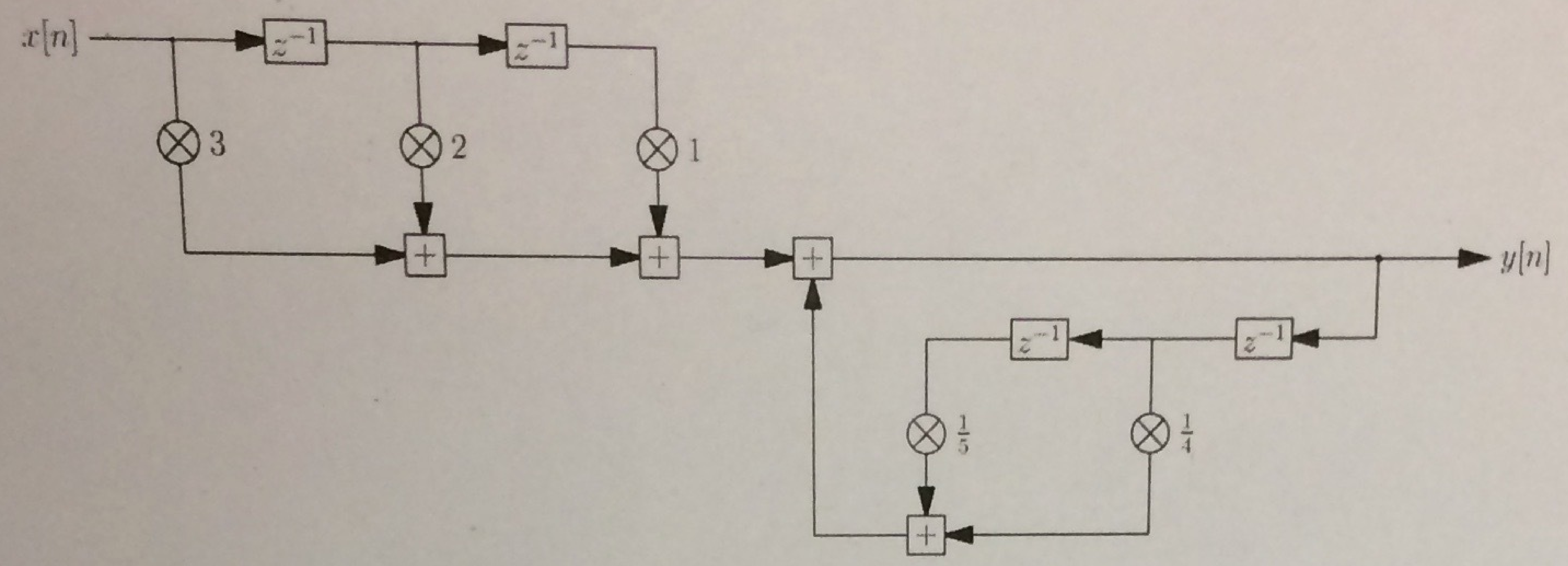
$$z_{x1/2} = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{69}{320}} \Rightarrow z_{x1} = 0{,}58,\ z_{x2} = -0{,}34$$



0,5 Punkte für die Polstellen

0,5 Punkte für die Nullstellen

e) Skizzieren Sie die entsprechende Filterstruktur in Direktform. 2 P



0,5 Punkte für den FIR-Anteil

0,5 Punkte für den IIR-Anteil