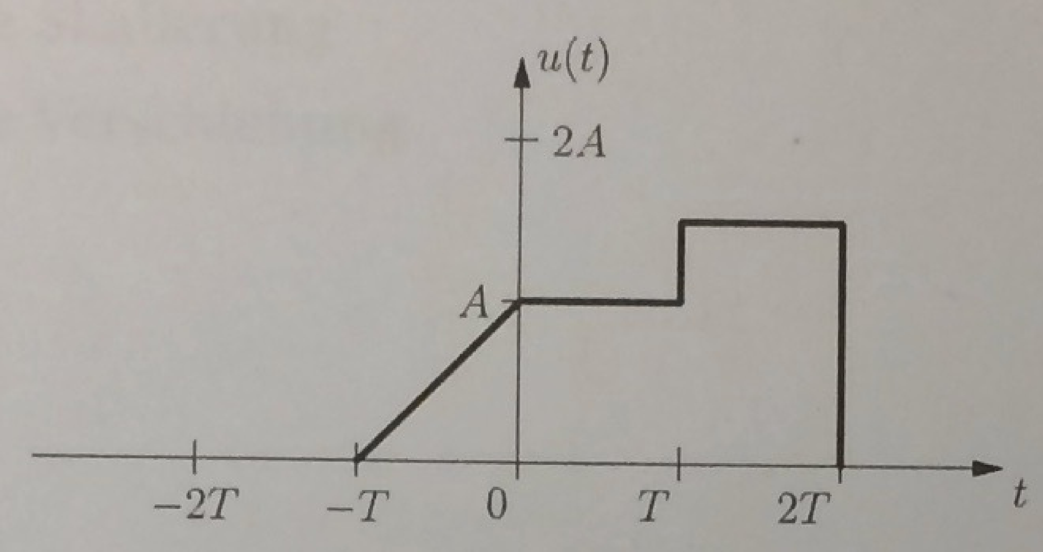
1 Zeitkontinuierliche Signale — 12 Punkte

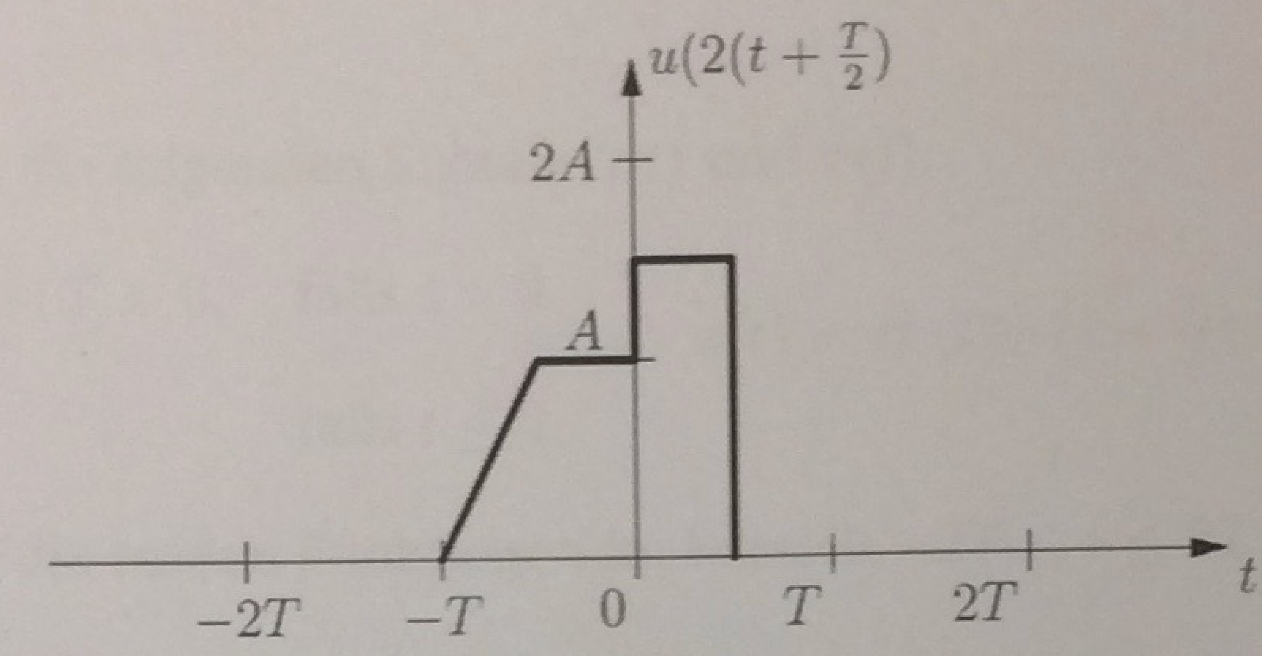
1.1 Gegeben sei das folgende zeitkontinuierliche Signal $u(t)$. — 3 P



a) Geben Sie die Energie E_u des Signals an. — 1 P

$$
\begin{aligned}
E_u &= \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt = \int_{-T}^{0} \left(\frac{A}{T}\cdot t + A\right)^2 dt + A^2T + \frac{9}{4}A^2T \\
&= \int_{-T}^{0} \frac{A^2}{T^2}\cdot t^2 + 2\frac{A^2}{T}\cdot t + A^2 dt + A^2T + \frac{9}{4}A^2T \\
&= \left[\frac{A^2}{3T^2}\cdot t^3 + \frac{A^2}{T}\cdot t^2 + A^2 t\right]_{-T}^{0} + \frac{13}{4}A^2T \\
&= \left[0 + \frac{A^2}{3T^2}\cdot T^3 - \frac{A^2}{T}\cdot T + A^2T\right] + \frac{13}{4}A^2T \\
&= \frac{43}{12}A^2T
\end{aligned}
$$

b) Skizzieren Sie das Signal $u\left(2\left(t+\frac{T}{2}\right)\right)$. — 2 P



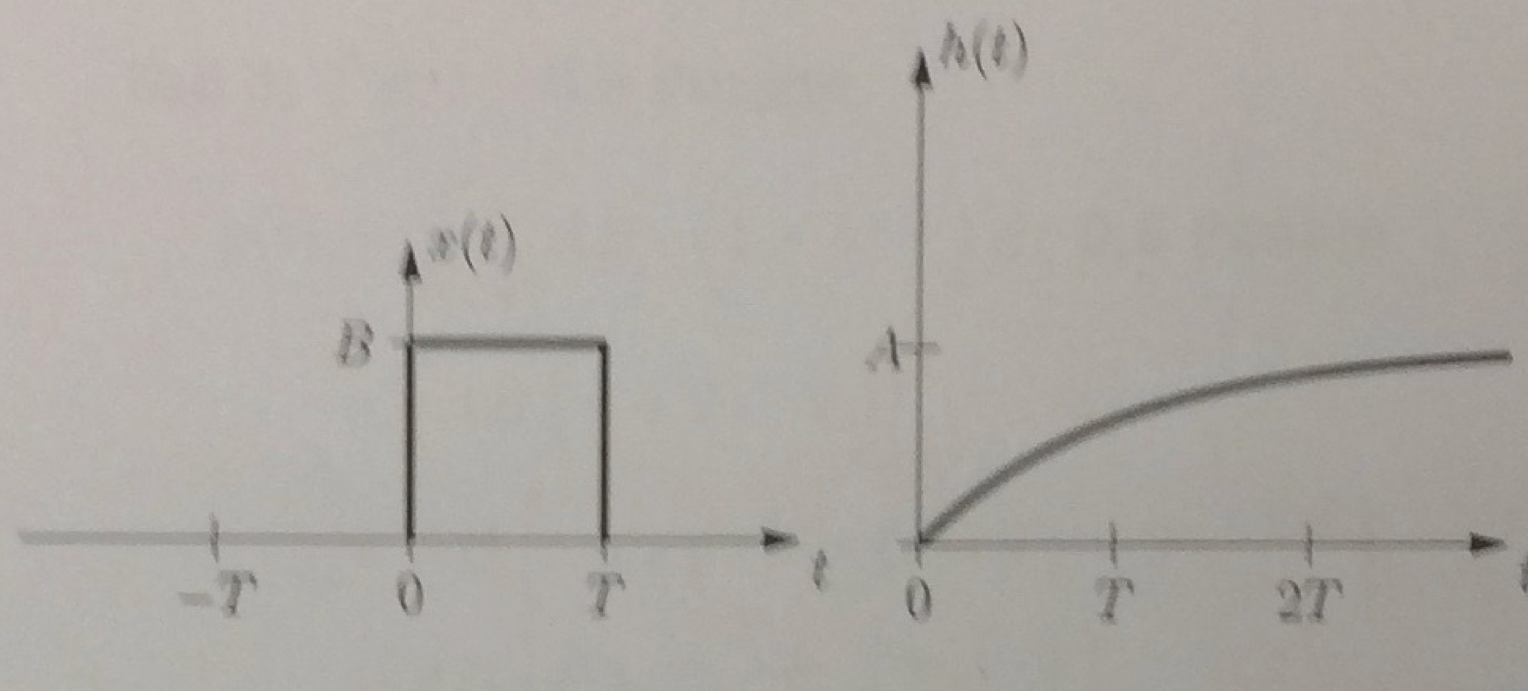
0,5 Punkte für die richtige Skalierung

0,5 Punkte für die richtige Verschiebung

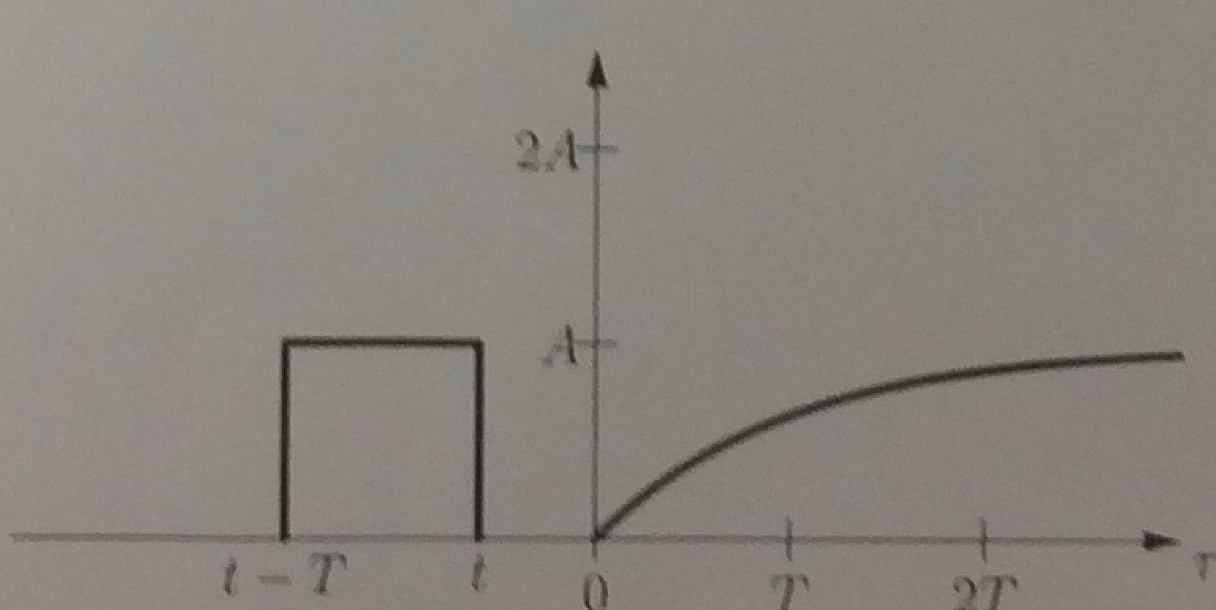
1.2 Gegeben seien die folgenden Signale $h(t)$ und $x(t)$. 7 P

$$h(t) = \begin{cases} A\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right), T > 0, & \text{falls } t > 0 \\ 0, & \text{falls } t \leq 0 \end{cases} \qquad x(t) = B \cdot \sqcap_T\left(t - \tfrac{T}{2}\right)$$

a) Skizzieren Sie die beiden Funktionen im Bereich $-2T \leq t \leq 2T$. 1 P



b) Berechnen Sie die Antwort $y(t)$ eines Filters mit der Impulsantwort $h(t)$ auf das Eingangssignal $x(t)$. 3 P



Fall 1: $t \leq 0 : y(t) = 0$

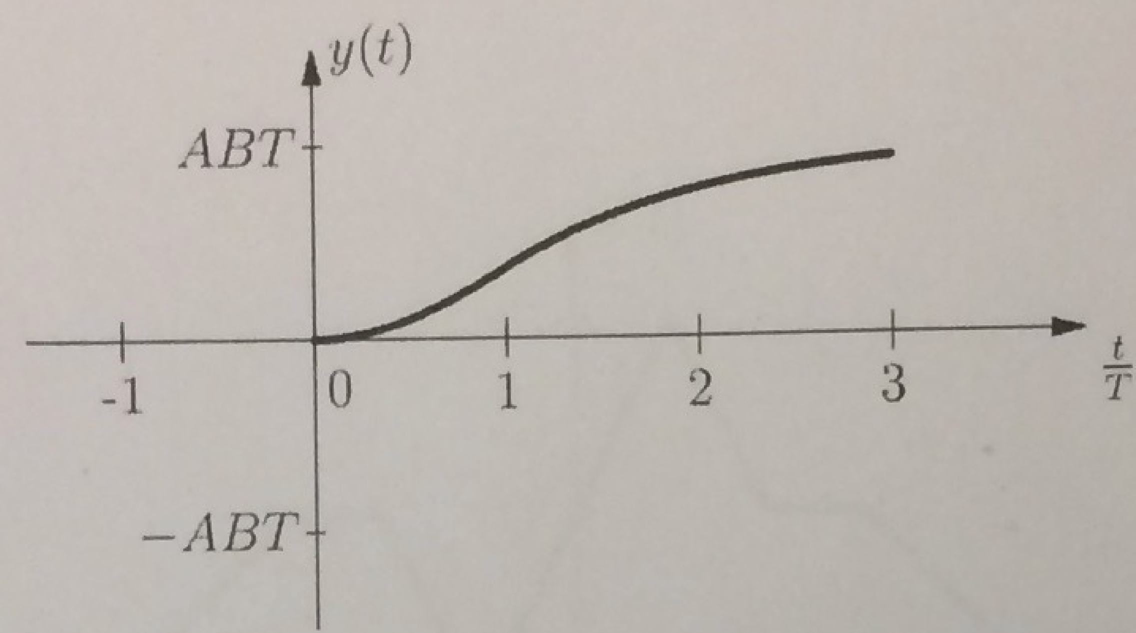
Fall 2: $0 < t \leq T :$ **0,5 Punkte**

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t AB \cdot \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}}\right) d\tau \text{ **0,5 Punkte**} \\ &= \left[AB \cdot \left(\tau + Te^{-\frac{\tau}{T}}\right)\right]_0^t \\ &= AB \cdot \left(t + Te^{-\frac{t}{T}}\right) - ABT \text{ **0,5 Punkte**} \end{aligned}$$

Fall 3: $T < t :$ **0,5 Punkte**

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-T}^t AB \cdot \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}}\right) d\tau \text{ **0,5 Punkte**} \\ &= \left[AB\left(\tau + Te^{-\frac{\tau}{T}}\right)\right]_{t-T}^t \\ &= AB\left[t + Te^{-\frac{t}{T}} - (t-T) - Te^{-\frac{t-T}{T}}\right] \\ &= AB\left[T + Te^{-\frac{t}{T}} - Te^{1-\frac{t}{T}}\right] \\ &= ABT \cdot \left[1 + e^{-\frac{t}{T}}(1-e)\right] \text{ **0,5 Punkte**} \end{aligned}$$

c) Skizzieren Sie $y(t)$ im Bereich $-3T \leq t \leq 3T$. 2 P



0,5 Punkte für die richtige Nullstelle

1 Punkt für die maximale Amplitude (ABT)

0,5 Punkte für den Wendepunkt bei $t = T$

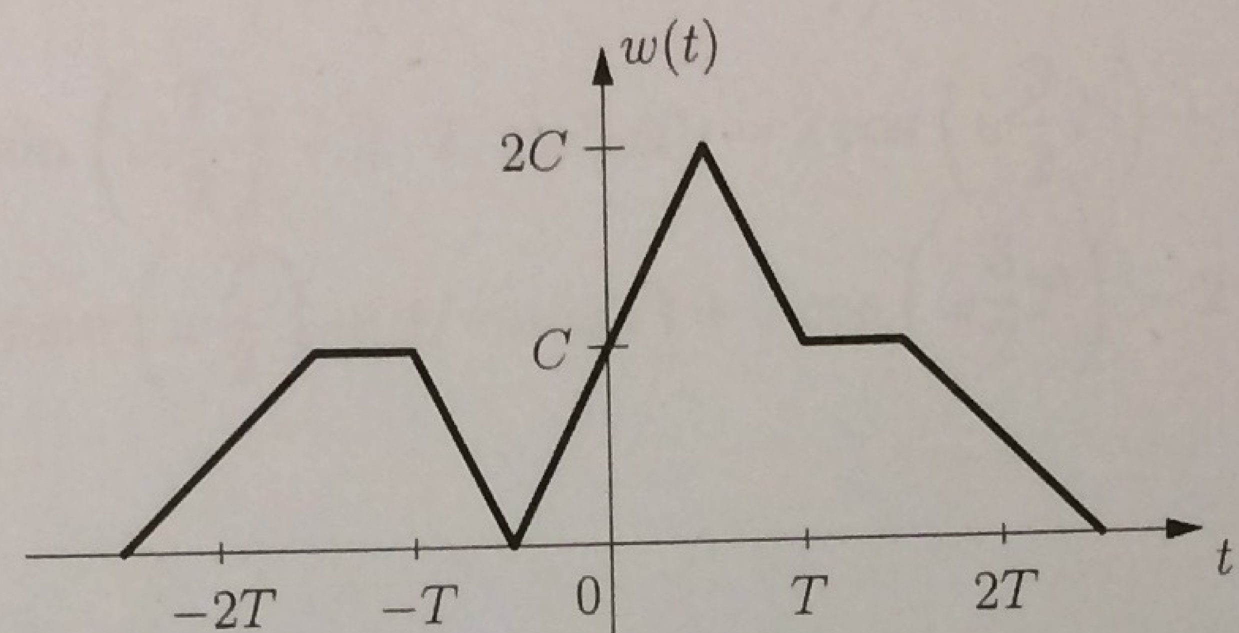
d) Beweisen Sie allgemein den Zusammenhang $r_{uv}(-t) = u(t) * v(-t)$. 1 P

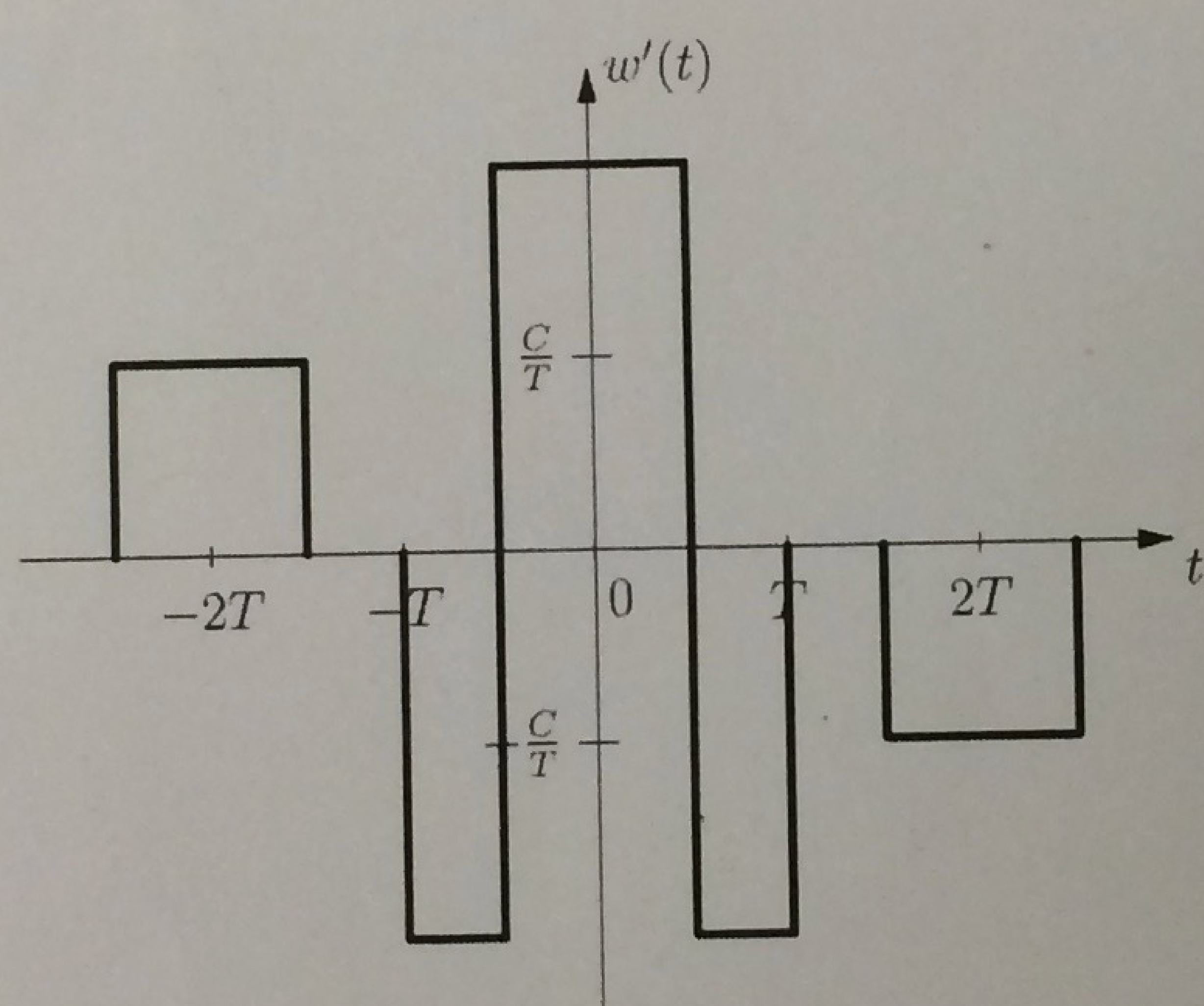
$$u(t) * v(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot v(-(t-\tau))d\tau \quad \textbf{0,5 Punkte}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot v(\tau - t)d\tau$$

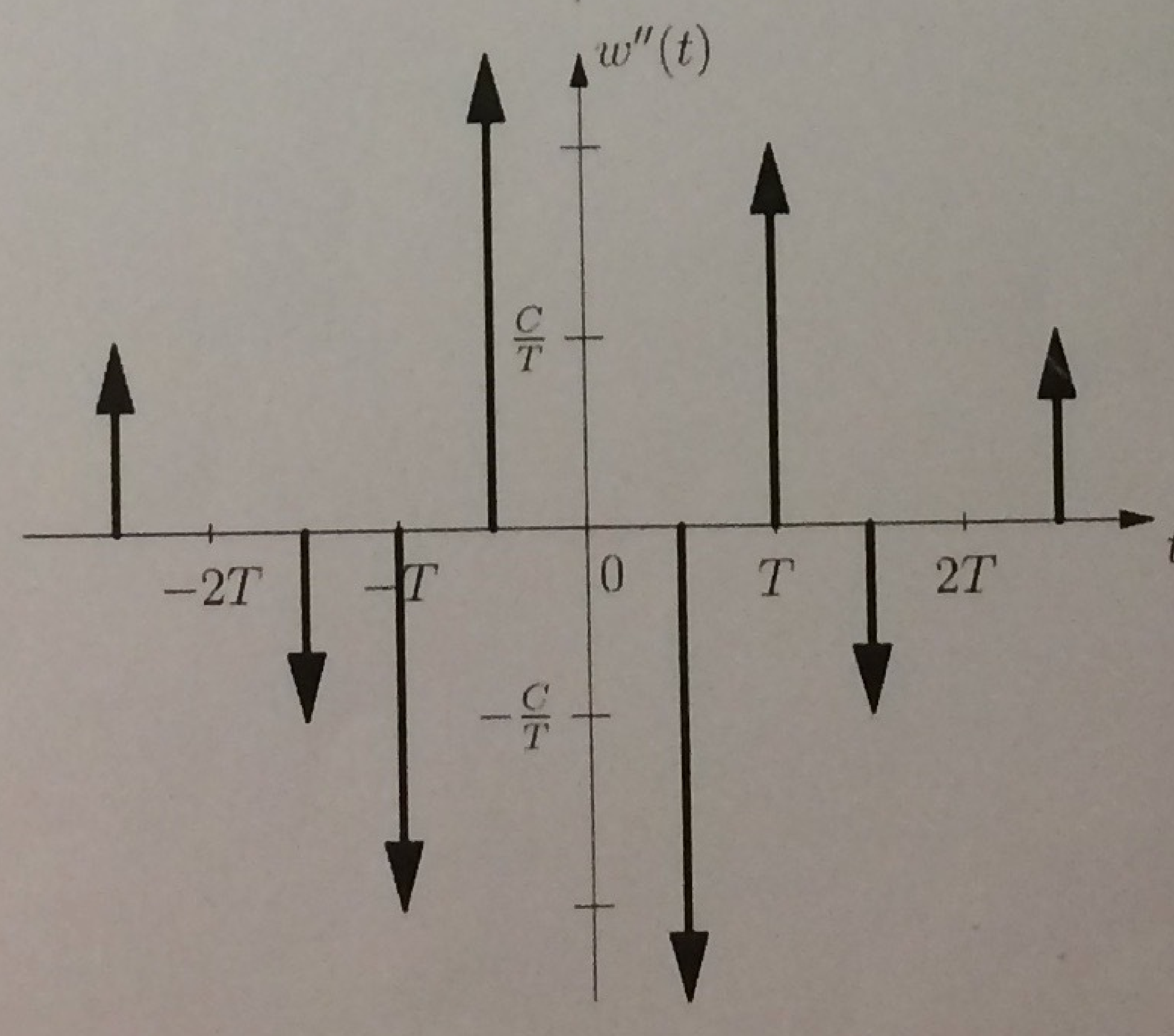
$$= r_{uv}(-t) \quad \textbf{0,5 Punkte}$$

1.3 Berechnen Sie die Fouriertransformierte des folgenden Signals. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zu trigonometrischen Funktionen zusammen. 2 P





0,5 Puntke



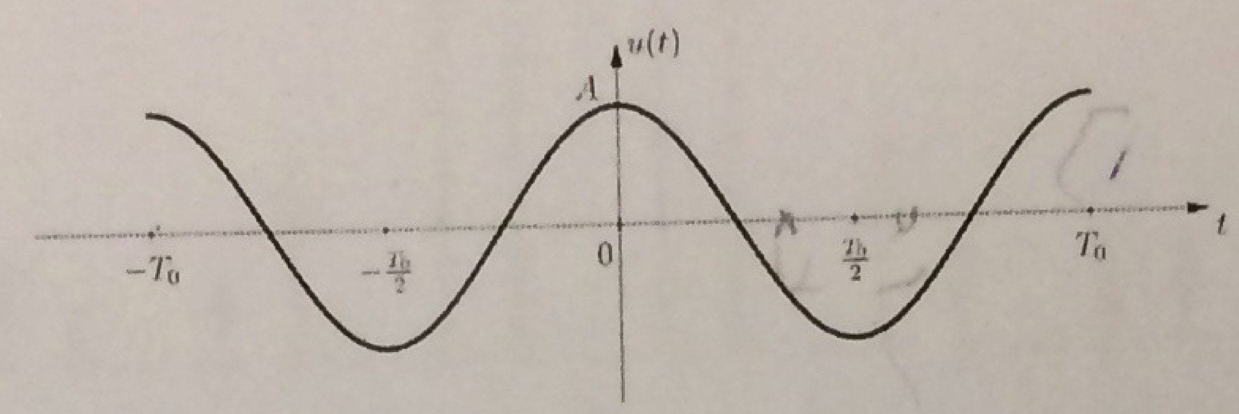
0,5 Punkte

$$w''(t) = \frac{C}{T}\left(-4\delta\left(t-\frac{T}{2}\right) + 4\delta\left(t+\frac{T}{2}\right) + 2\delta\left(t-T\right) - 2\delta\left(t+T\right)\right.$$
$$\left.-\delta\left(t-\frac{3}{2}T\right) - \delta\left(t+\frac{3}{2}T\right) + \delta\left(t-\frac{5}{2}T\right) + \delta\left(t+\frac{5}{2}T\right)\right)$$
$$(j\omega)^2 W(j\omega) = \frac{C}{T}\left(4\left(e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}\right) + -2\left(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}\right)\right.$$
$$\left.-\left(e^{j\omega\frac{3}{2}T} + e^{-j\omega\frac{3}{2}T}\right) + \left(e^{j\omega\frac{5}{2}T} + e^{-j\omega\frac{5}{2}T}\right)\right) \textbf{ 0,5 Punkte}$$
$$-\omega^2 W(j\omega) = \frac{C}{T}\left(4\cdot 2j\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right) - 2\cdot 2j\sin(\omega T) - 2\cos\left(\omega\frac{3}{2}T\right) + 2\cos\left(\omega\frac{5}{2}T\right)\right)$$
$$W(j\omega) = \frac{C}{\omega^2 T}\left(-8j\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right) + 4j\sin(\omega T) + 2\cos\left(\omega\frac{3}{2}T\right) - 2\cos\left(\omega\frac{5}{2}T\right)\right) \textbf{ 0,5 Punkte}$$

2 Zeitkontinuierliche Systeme und Abtastung **10 Punkte**

2.1 Gegeben sei das Signal $u(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. **7 P**

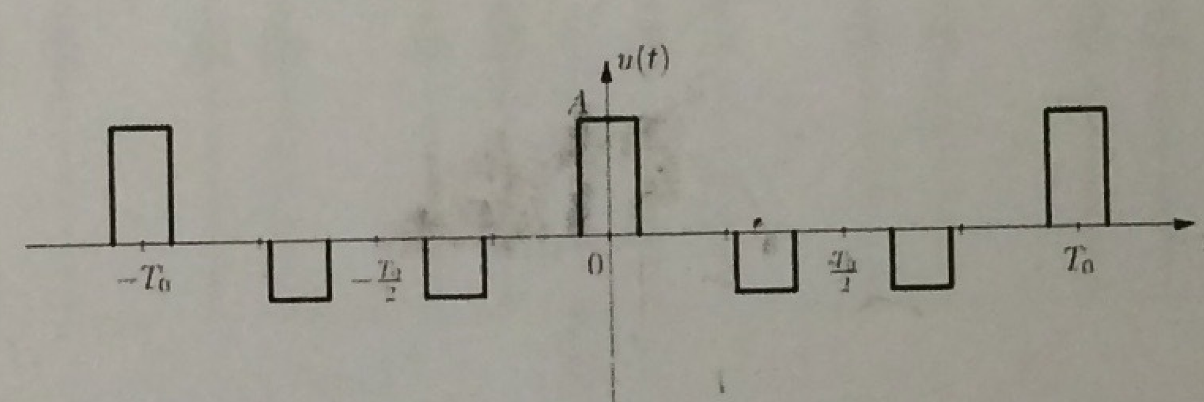
a) Skizzieren Sie $u(t)$ im Bereich $-T_0 \leq t \leq T_0$. **1 P**



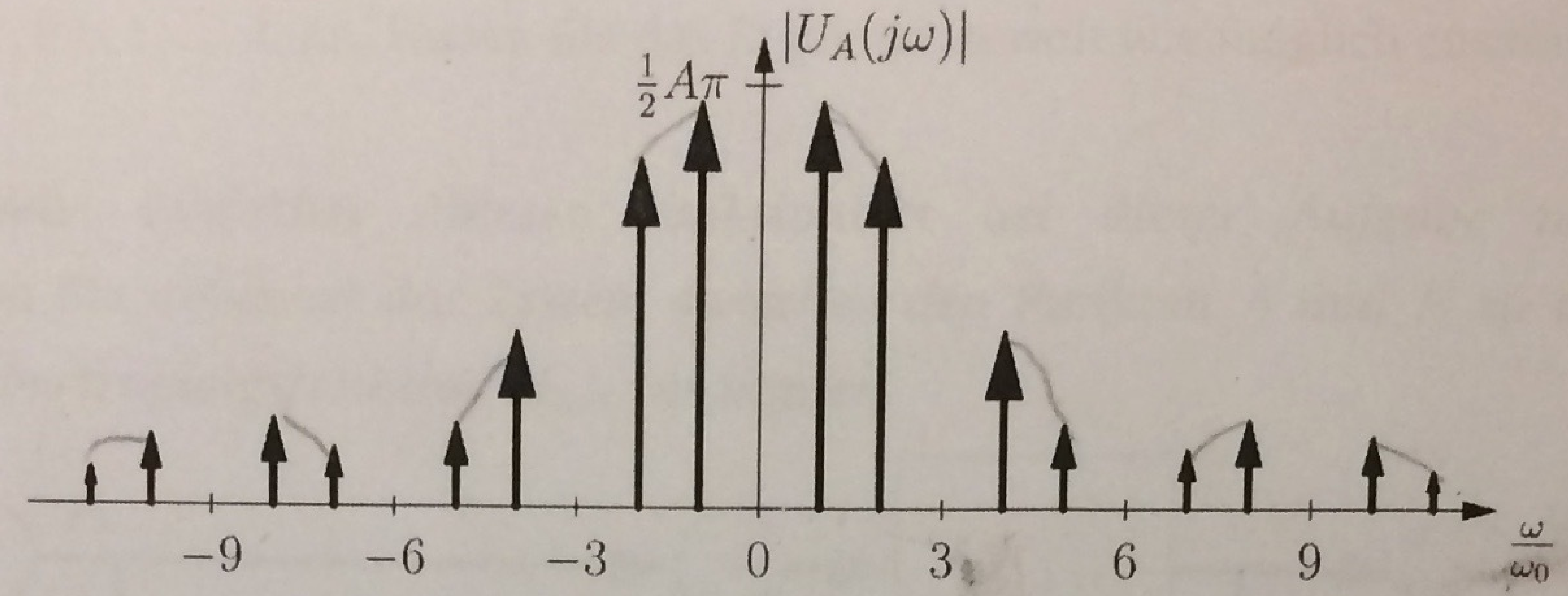
b) Geben Sie das Spektrum $U(j\omega)$ an. **1 P**

$$U(j\omega) = A\pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

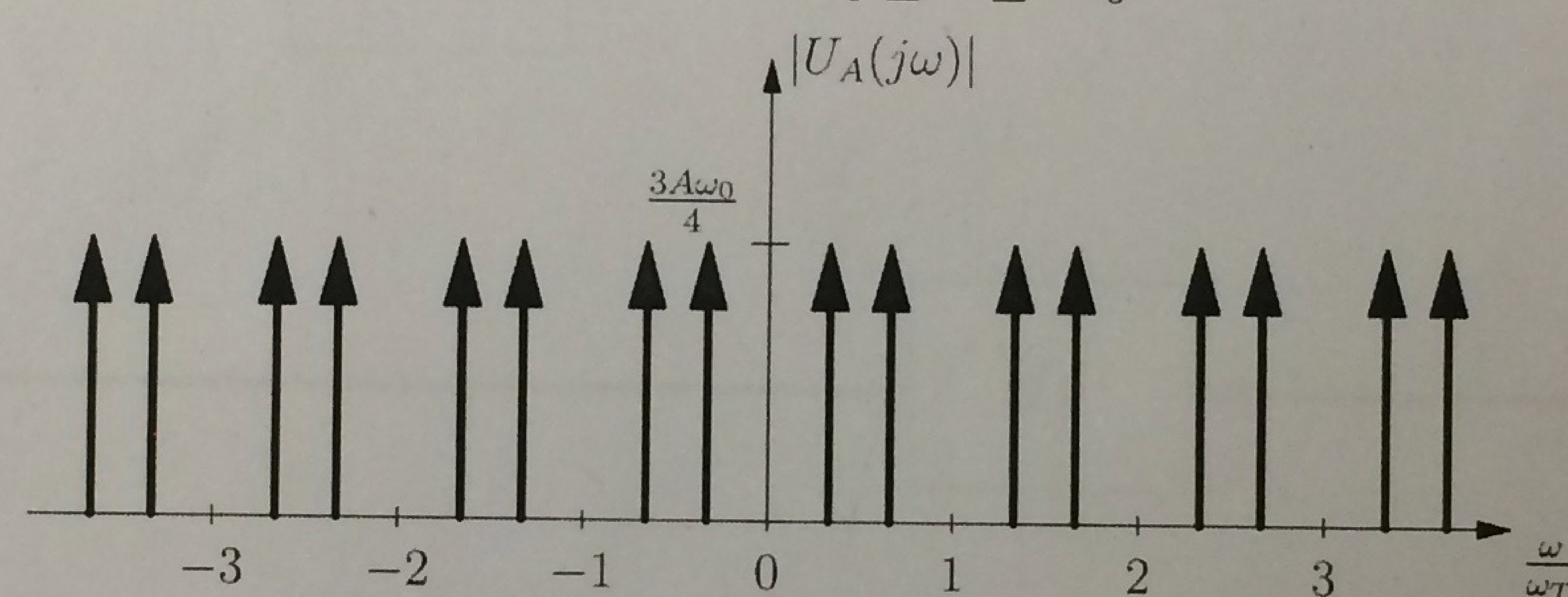
c) Das Signal werde mittels Flattop-Sampling ($\alpha = \frac{1}{2}$, $\omega_T = 3\omega_0$) abgetastet. Skizzieren Sie den Verlauf des abgetasteten Signals $u_A(t)$ im Bereich $-T_0 \leq t \leq T_0$. **2 P**



d) Skizzieren Sie das Spektrum $U_a(j\omega)$ des mittels Flattop-Sampling ($\alpha = \frac{1}{2}$, $\omega_T = 3\omega_0$) abgetasteten Signals im Bereich $-12\omega_0 \leq \omega \leq 12\omega_0$. 2 P



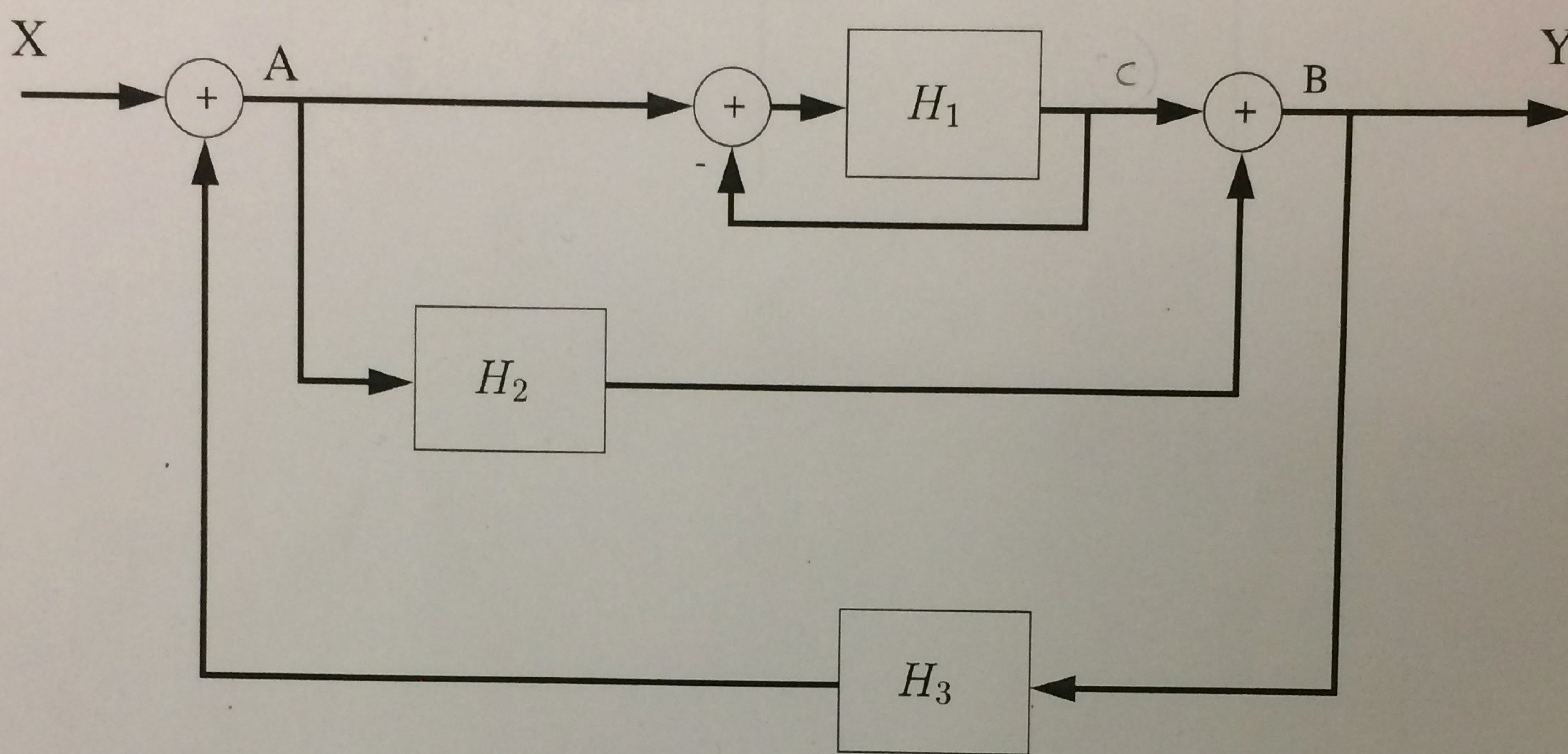
e) Das Signal $u(t)$ werde nun ideal mit $\omega_T = 1{,}5\omega_0$ abgetastet. Skizzieren Sie für diesen Fall das Spektrum im Bereich $-4\omega_0 \leq \omega \leq 4\omega_0$. 1 P



mit $T = \frac{2\pi}{1{,}5\omega_0} = \frac{4\pi}{3\omega_0}$

2.2 Gegeben sei das folgende Blockschaltbild. Geben Sie die Gesamtübertragungsfunktion $H_{\text{ges}}(s)$ in Abhängigkeit von den Einzelübertragungsfunktionen $H_i(s)$, $i = 1, \ldots, 4$, an. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zusammen. **2 P**

Hinweis: Einfaches Ablesen funktioniert bei dieser Aufgabe nicht! Fassen Sie zunächst das System zwischen den Punkten A und B zu einer Teilübertragungsfunktion H_{teil} zusammen.

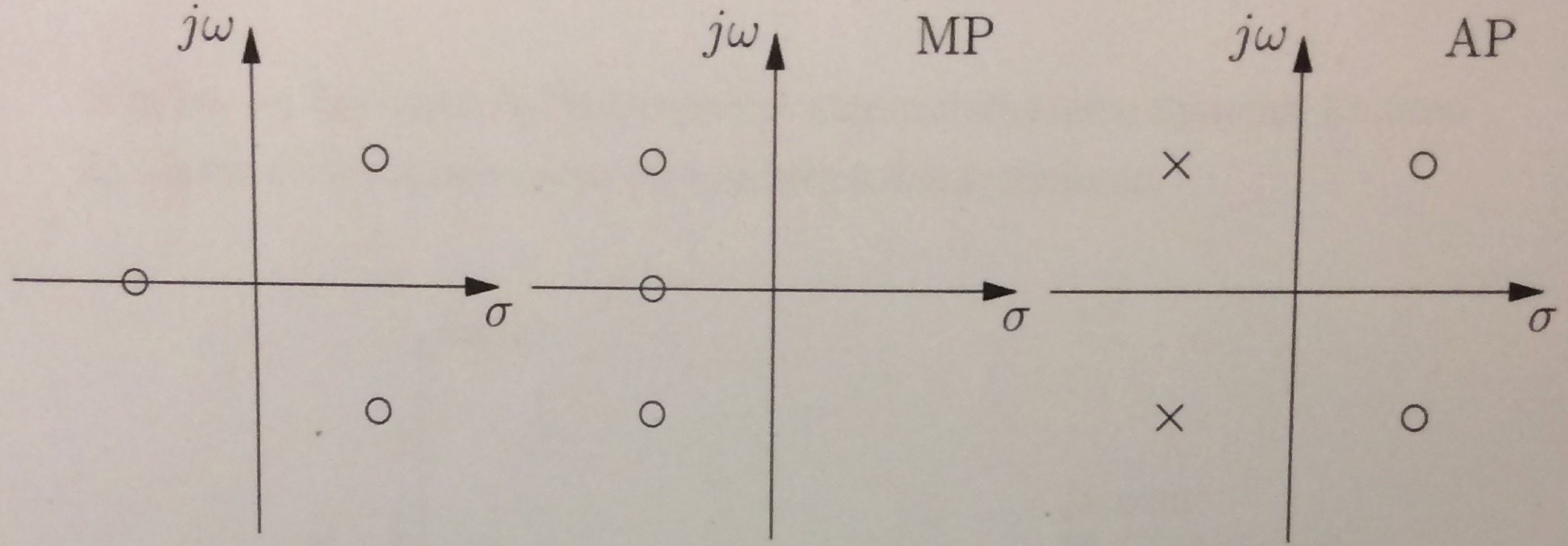


$$H_{\text{teil}} = \frac{H_1}{1+H_1} + H_2 = \frac{H_1 + H_2 + H_1H_2}{1+H_1}$$

$$H_{\text{ges}} = \frac{H_{\text{teil}}}{1 - H_{\text{teil}}H_3} = \frac{\frac{H_1+H_2+H_1H_2}{1+H_1}}{1 - \frac{H_1+H_2+H_1H_2}{1+H_1}H_3}$$

$$= \frac{H_1 + H_2 + H_1H_2}{1 + \underset{1}{H_{\cancel{3}}} - H_1H_3 - H_2H_3 - H_1H_2H_3}$$

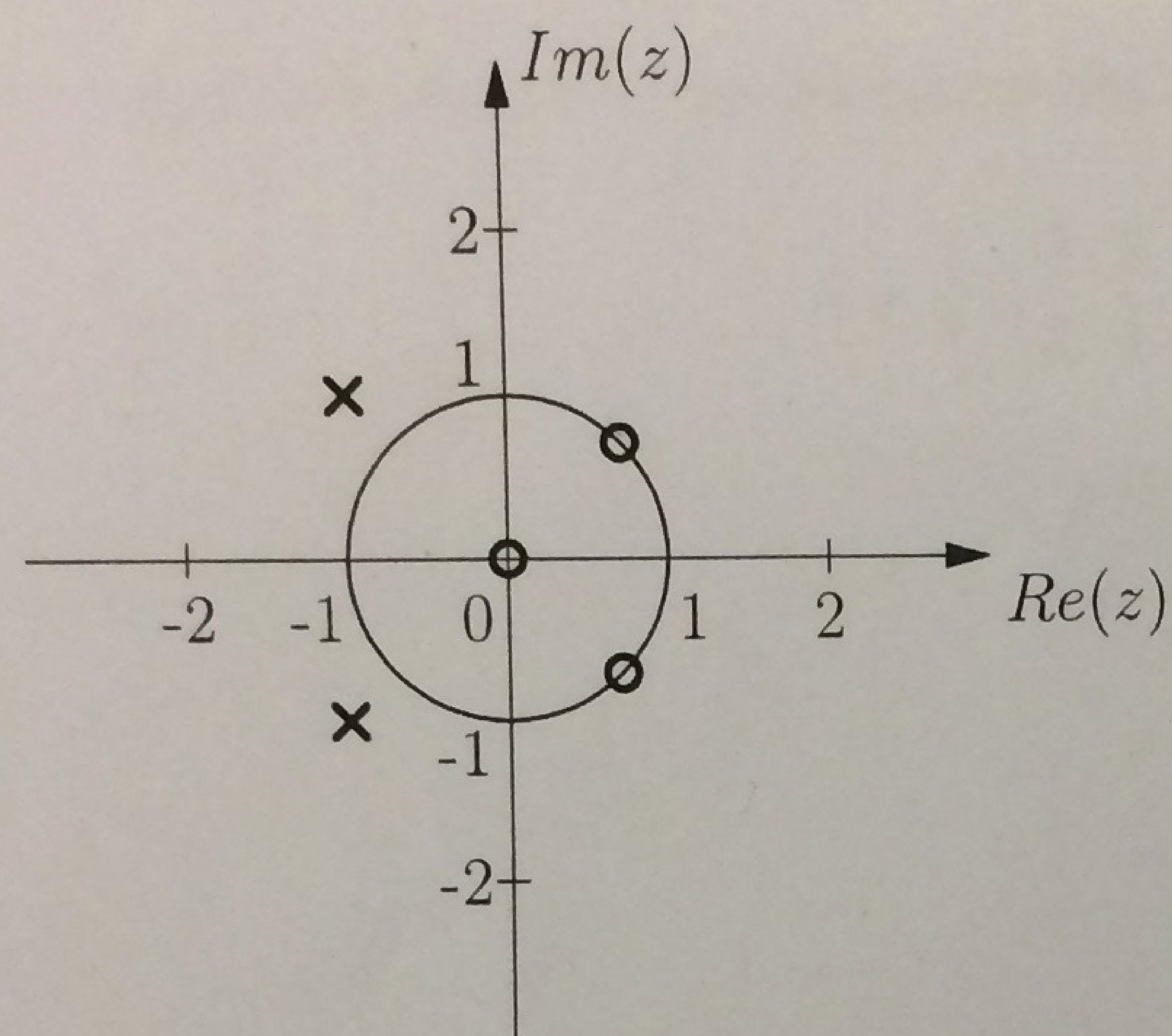
2.3 Zerlegen Sie das folgende System in Allpass (AP) und minimalphasigen Anteil (MP). 1 P



3 Zeitdiskrete Signale und Systeme — 10 Punkte

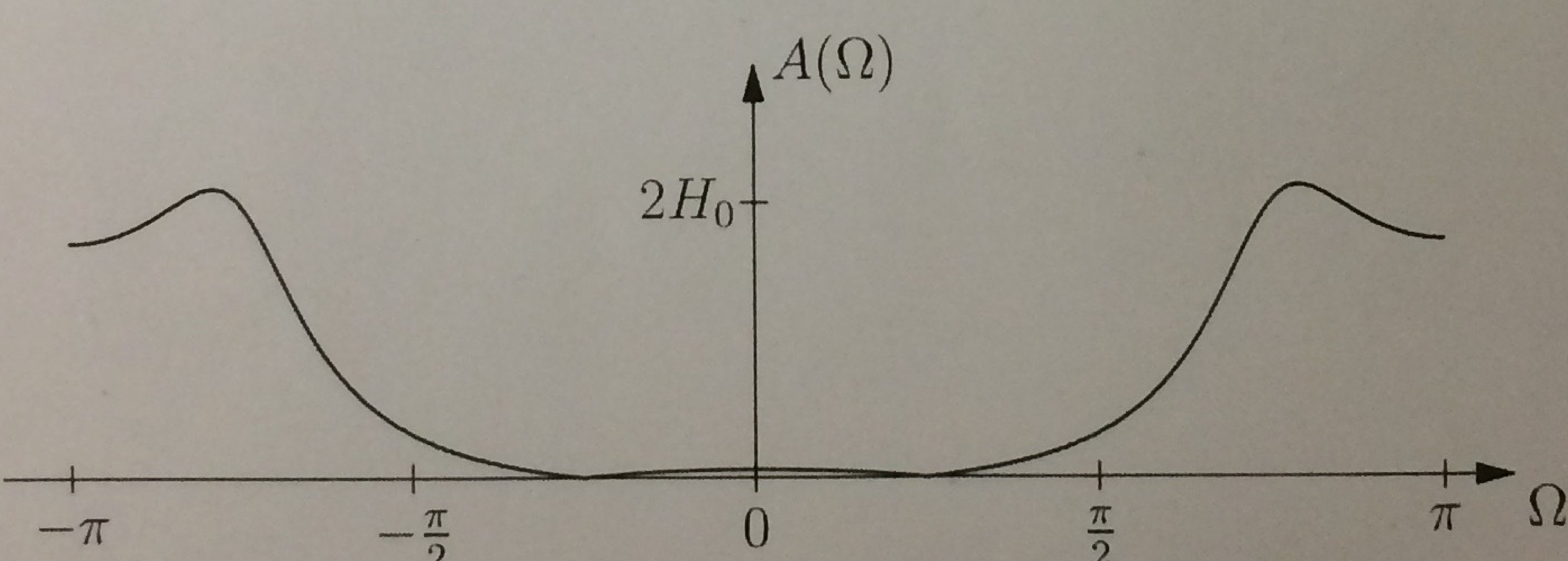
3.1 PN-Diagramme zeitdiskreter Systeme — 4 P

a) Gegeben sei das folgende PN-Diagramm eines zeitdiskreten Systems. Kreuzen Sie rechts die entsprechenden Eigenschaften des Systems an. 3 P



ja nein
☒ ☐ reellwertig
☐ ☒ (bedingt) stabil
☐ ☒ kausal
☐ ☒ linearphasig
☐ ☒ Allpass
☐ ☒ minimalphasig

b) Skizzieren Sie den Amplitudengang des Systems. 1 P



3.2 Gegeben sei die folgende Differenzengleichung eines zeitdiskreten Filters. 5 P

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2) - \frac{1}{2}y(n-1)$$

a) Handelt es sich um ein FIR- oder ein IIR-Filter? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P

IIR-Filter, da die Differenzengleichung einen Rückkopplungsterm ($-\frac{1}{2}y(n-1)$) enthält.

b) Berechnen Sie die ersten vier Elemente der Impulsantwort des Filters. 2 P

$$h = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{9}{8}\right\}$$

c) Geben Sie die Systemfunktion des Filters an und bestimmen Sie die Lage der Pol- und Nullstellen. 1 P

$$Y(z) = X(z)\left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}\right) - \frac{1}{2}Y(z)z^{-1}$$

$$Y(z)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) = X(z)\left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}\right)$$

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^2 + \frac{1}{2}z}$$

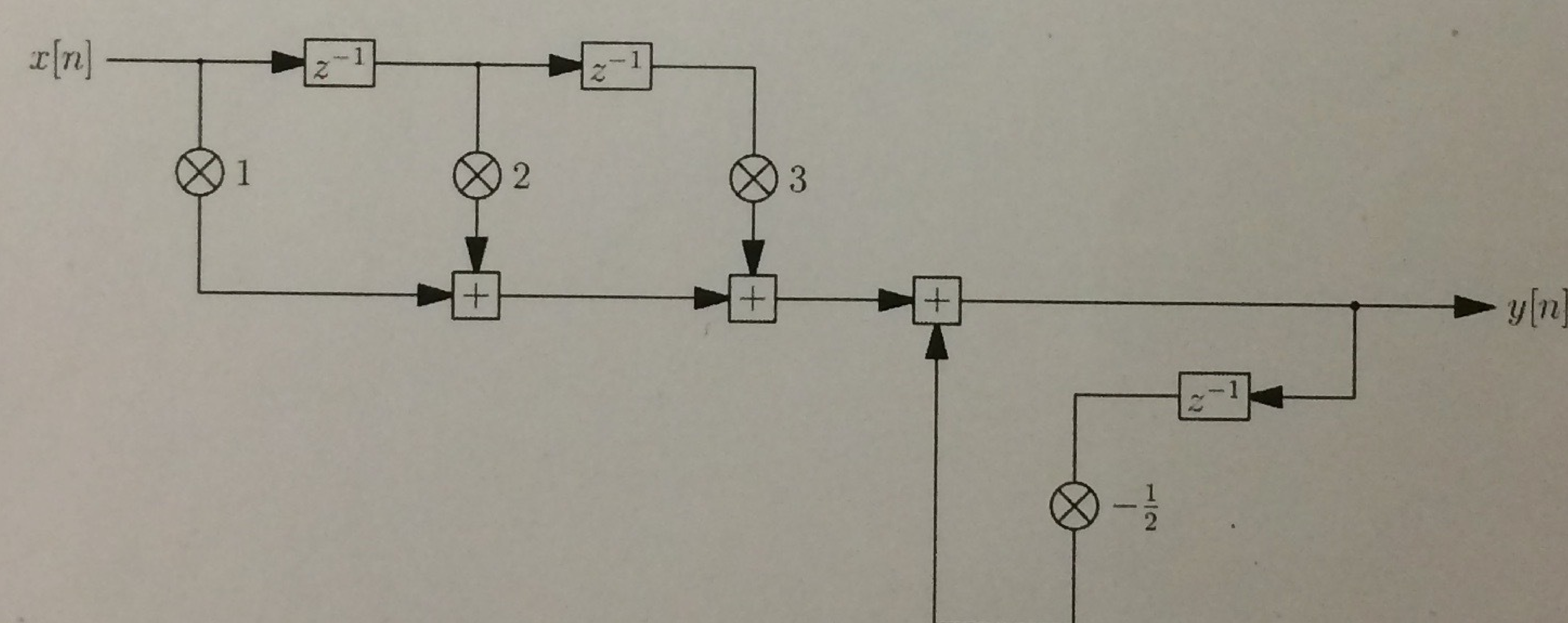
$$z_{o1/2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{1-3} = -1 \pm \sqrt{2}j$$

$$z_{x1} = -\frac{1}{2},\ z_{x2} = 0$$

0,5 Punkte für den Zählerterm

0,5 Punkte für den Nennerterm

d) Skizzieren Sie die Struktur des Filters in Direktform. 1 P



3.3 Berechnen Sie die Ergebnisse von Faltung und zyklischer Faltung der Signale $u = \{1, 0, 2\}$ und $v = \{-1, -2, 0\}$. 1 P

gewöhnliche Faltung: $u * v = \{-1, -2, -2, -4, 0\}$

zyklische Faltung: $u * v = \{-5, -2, -2\}$