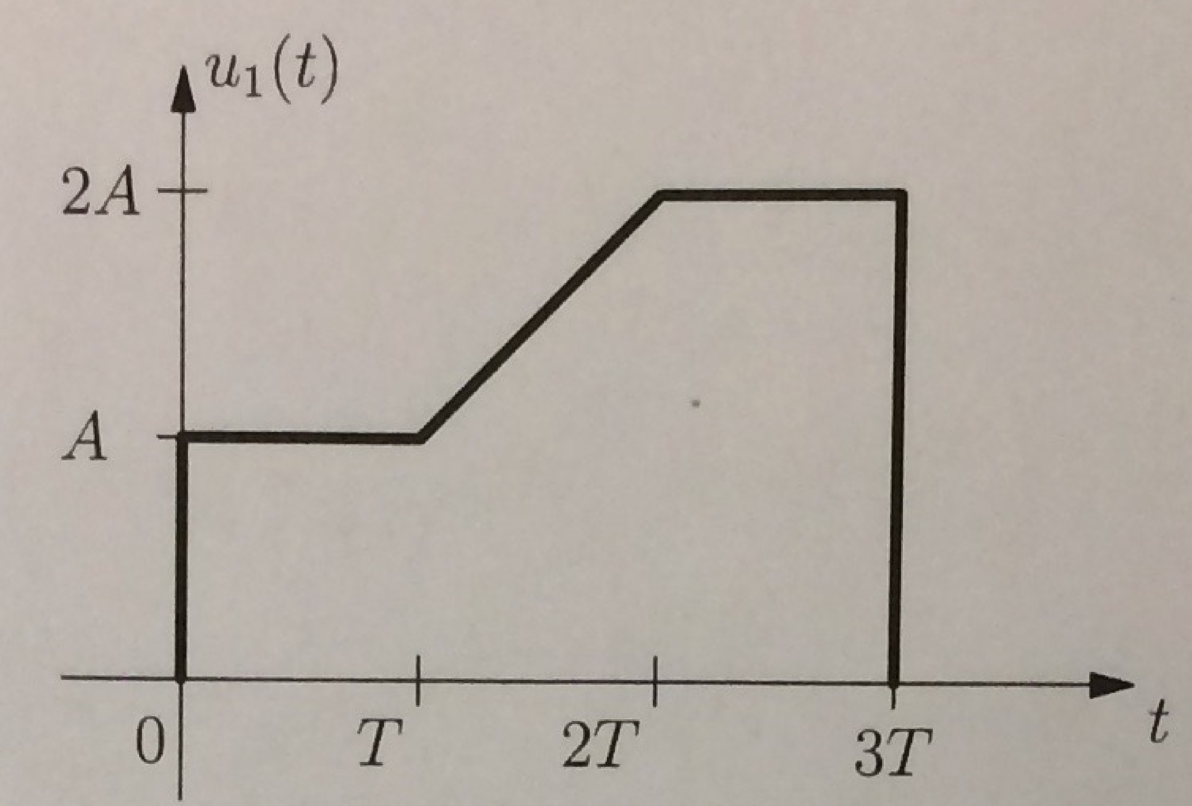
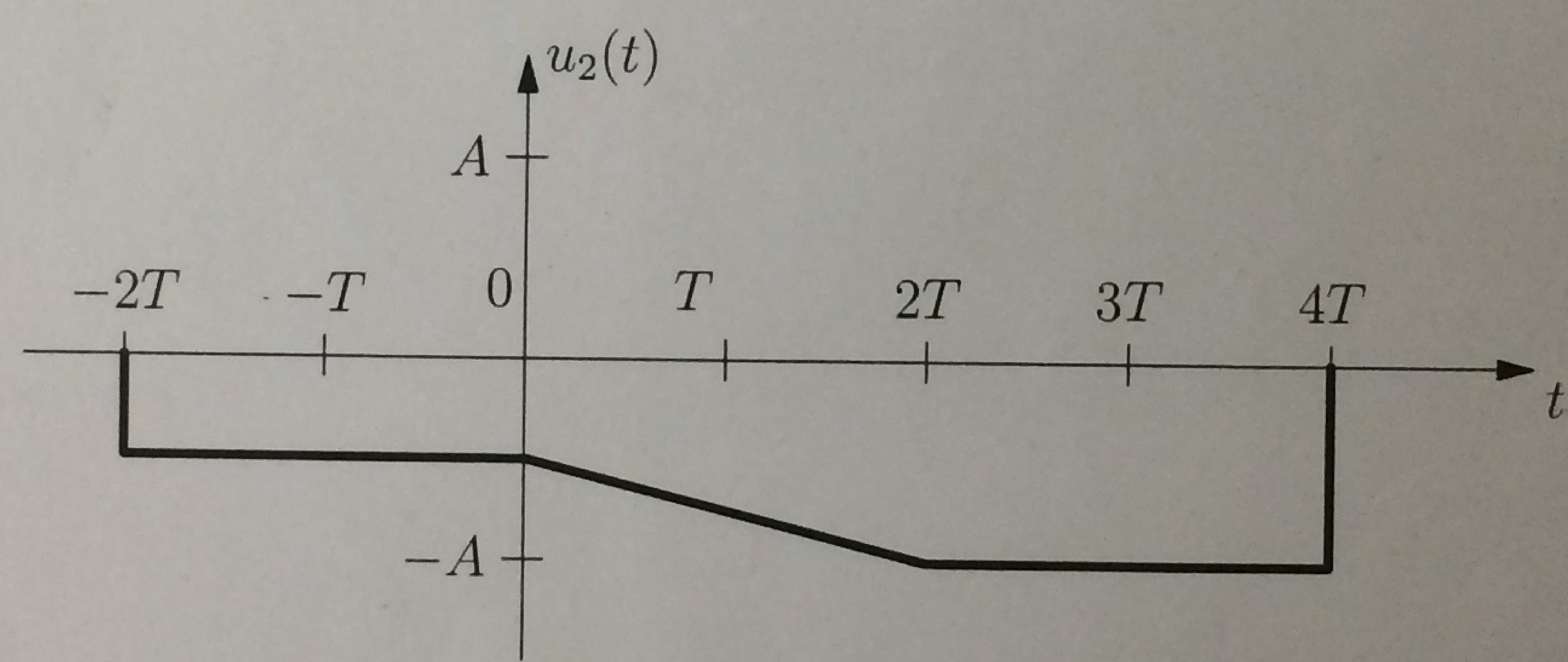
1 Zeitkontinuierliche Signale 11 Punkte

1.1 Gegeben sei das folgende zeitkontinuierliche Signal $u_1(t)$. 3 P



a) Skizzieren Sie das Signal $u_2(t) = -\frac{1}{2}u_1(\frac{1}{2}t + T)$. 1,5 P



0,5 Punkte für die Skalierung der y-Achse

0,5 Punkte für die Skalierung der x-Achse

0,5 Punkte für die Verschiebung

b) Das Signal $u_1(t)$ werde periodisch fortgesetzt mit $T_P = 6T$. Berechnen Sie die Leistung des periodisch fortgesetzten Signals $u_P(t) = u_1(t) * \delta_{T_P}(t)$. 1,5 P

$$P = \frac{1}{6T}\int_{-3T}^{3T} u_1(t)^2 dt \textbf{ 0,5 Punkte}$$

$$= \frac{1}{6T}\left(\int_0^T A^2 dt + \int_T^{2T} (\frac{A}{T}t)^2 dt + \int_{2T}^{3T} (2A)^2 dt\right) \textbf{ 0,5 Punkte}$$

$$= \frac{1}{6T}\left(\left[A^2 t\right]_0^T + \left[\frac{A^2}{3T^2}t^3\right]_T^{2T} + \left[4A^2 t\right]_{2T}^{3T}\right)$$

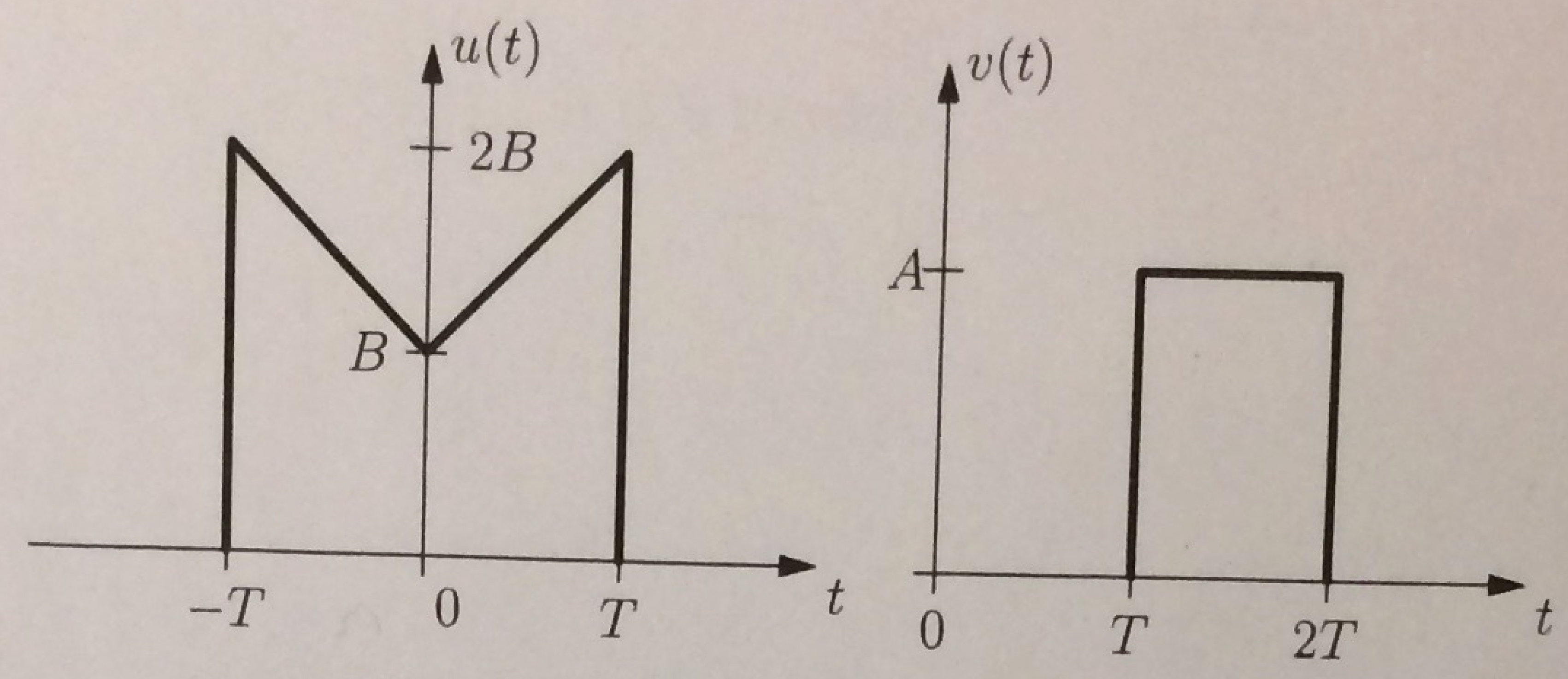
$$= \frac{1}{6T}\left(A^2T + \frac{A^2}{3T^2}8T^3 - \frac{A^2}{3T^2}T^3 + 4A^2\cdot 3T - 4A^2\cdot 2T\right)$$

$$= \frac{1}{6T}\left(A^2T + \frac{8}{3}A^2T - \frac{1}{3}A^2T + 12A^2T - 8A^2T\right)$$

$$= \frac{1}{6T}\frac{22}{3}A^2T = \frac{11}{9}A^2 \textbf{ 0,5 Punkte}$$

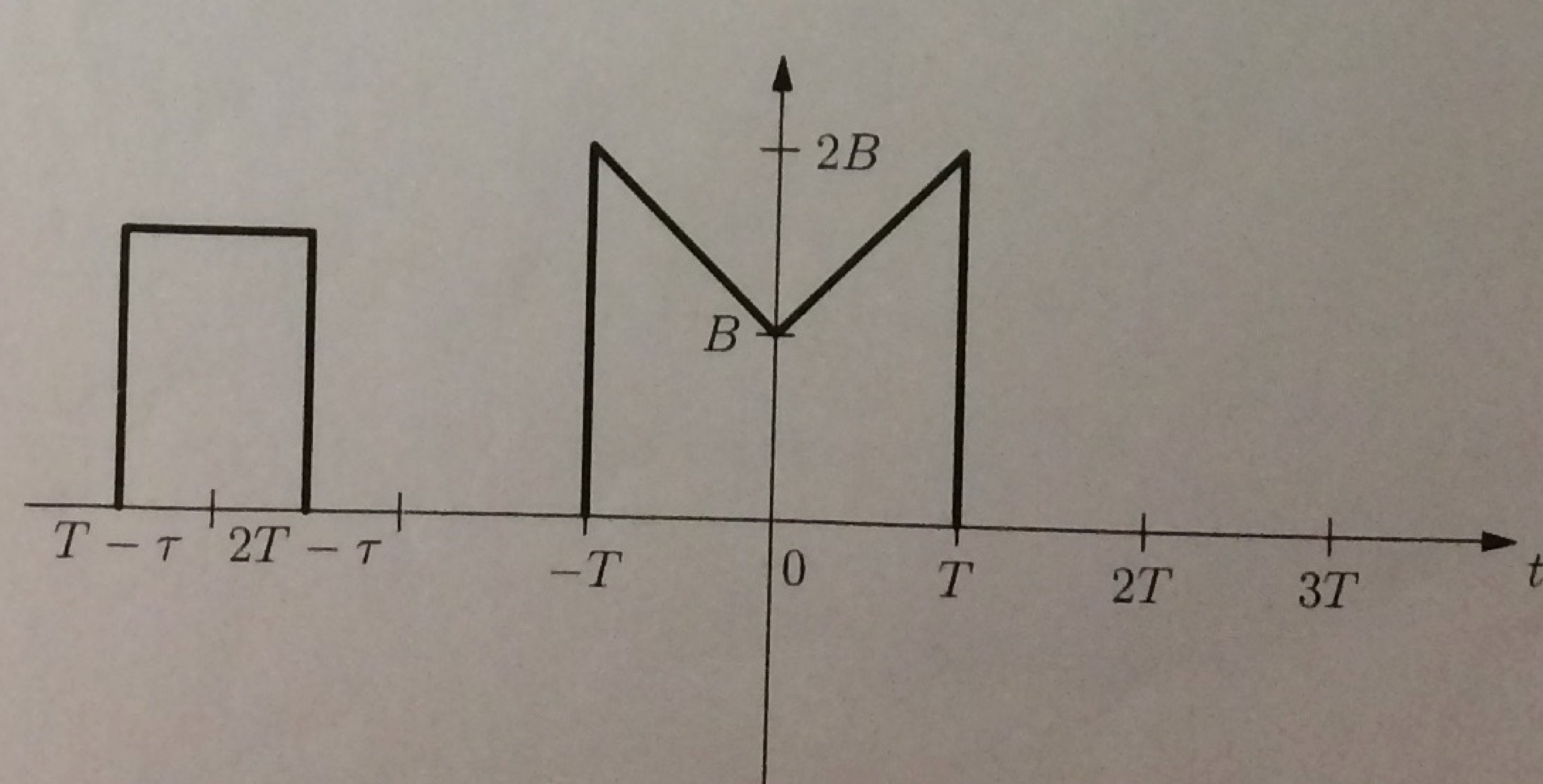
Für die ersten 0,5 Punkte müssen die Periodendauer und die Integralgrenzen eingesetzt sein

1.2 Gegeben seien die folgenden Signale $u(t)$ und $v(t)$. 6 P



a) Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktion $r_{uv}(\tau)$. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. 4,5 P

$$r_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t+\tau)dt$$



1. Fall: $2T-\tau<-T \Leftrightarrow \tau>3T: r_{uv}(\tau)=0$

2. Fall: $T-\tau<-T \Leftrightarrow 2T<\tau\leq 3T:$ **0,5 Punkte**

$$r_{uv}(\tau)=\int_{-T}^{2T-\tau} A\left(\frac{B}{T}(T-t)\right)dt \text{ **0,5 Punkte**}$$

$$=\frac{AB}{T}\left[Tt-\frac{1}{2}t^2\right]_{-T}^{2T-\tau}$$

$$=\frac{AB}{T}\left[T(2T-\tau)-\frac{1}{2}(2T-\tau)^2-(T(-T)-\frac{1}{2}(-T)^2)\right]$$

$$=\frac{AB}{T}\left[2T^2-T\tau-2T^2+2T\tau-\frac{1}{2}\tau^2+T^2+\frac{1}{2}T^2\right]$$

$$=\frac{AB}{T}\left(-\frac{1}{2}\tau^2+T\tau+\frac{3}{2}T^2\right) \text{ **0,5 Punkte**}$$

3. Fall: $T-\tau<0 \Leftrightarrow T<\tau\leq 2T:$ **0,5 Punkte**

$$r_{uv}(\tau)=\int_{T-\tau}^{0} A\left(\frac{B}{T}(T-t)\right)dt+\int_{0}^{2T-\tau} A\left(\frac{B}{T}(t+T)\right)dt \text{ **0,5 Punkte**}$$

$$=\frac{AB}{T}\left[Tt-\frac{1}{2}t^2\right]_{T-\tau}^{0}+\frac{AB}{T}\left[Tt+\frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{2T-\tau}$$

$$=\frac{AB}{T}\left(-\left(T(T-\tau)-\frac{1}{2}(T-\tau)^2\right)+T(2T-\tau)+\frac{1}{2}(2T-\tau)^2\right)$$

$$=\frac{AB}{T}\left(-T^2+T\tau+\frac{1}{2}T^2-T\tau+\frac{1}{2}\tau^2+2T^2-T\tau+2T^2-2T\tau+\frac{1}{2}\tau^2\right)$$

$$=\frac{AB}{T}\left(\tau^2-3T\tau+\frac{7}{2}T^2\right) \text{ **0,5 Punkte**}$$

4. Fall: $T-\tau<T \Leftrightarrow 0<\tau\leq T:$ **0,5 Punkte**

$$r_{uv}(\tau)=\int_{T-\tau}^{T} A\left(\frac{B}{T}(t+T)\right)dt \text{ **0,5 Punkte**}$$

$$=\frac{AB}{T}\left[Tt+\frac{1}{2}t^2\right]_{T-\tau}^{T}$$

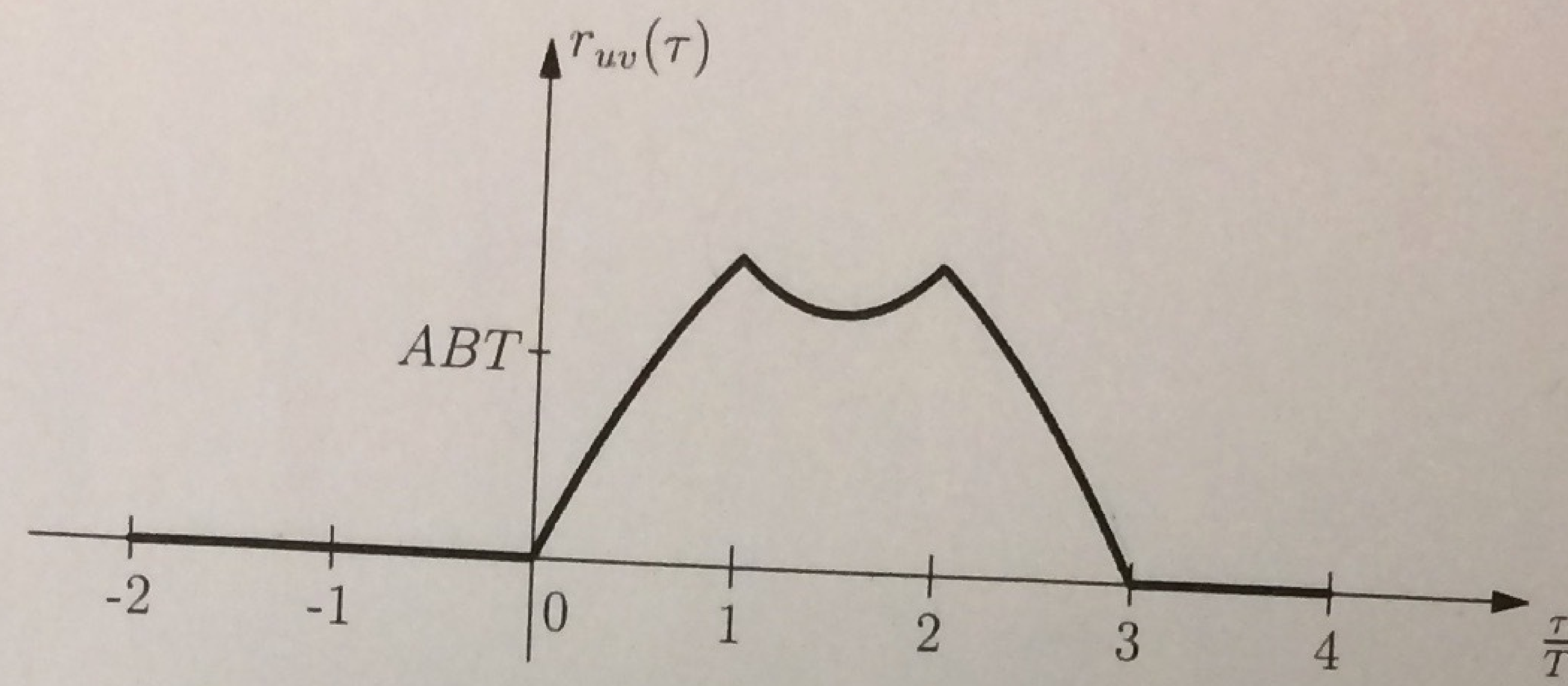
$$=\frac{AB}{T}\left(T^2+\frac{1}{2}T^2-\left(T(T-\tau)+\frac{1}{2}(T-\tau)^2\right)\right)$$

$$=\frac{AB}{T}\left(T^2+\frac{1}{2}T^2-T^2+T\tau-\frac{1}{2}T^2+T\tau-\frac{1}{2}\tau^2\right)$$

$$=\frac{AB}{T}\left(-\frac{1}{2}\tau^2+2T\tau\right) \text{ **0,5 Punkte**}$$

5. Fall: $T-\tau>T \Leftrightarrow \tau\leq 0: r_{uv}(\tau)=0$

b) Skizzieren Sie die Kreuzkorrelationsfunktion $r_{uv}(\tau)$ im Bereich $-2T \leq \tau \leq 4T$ 1,5 P



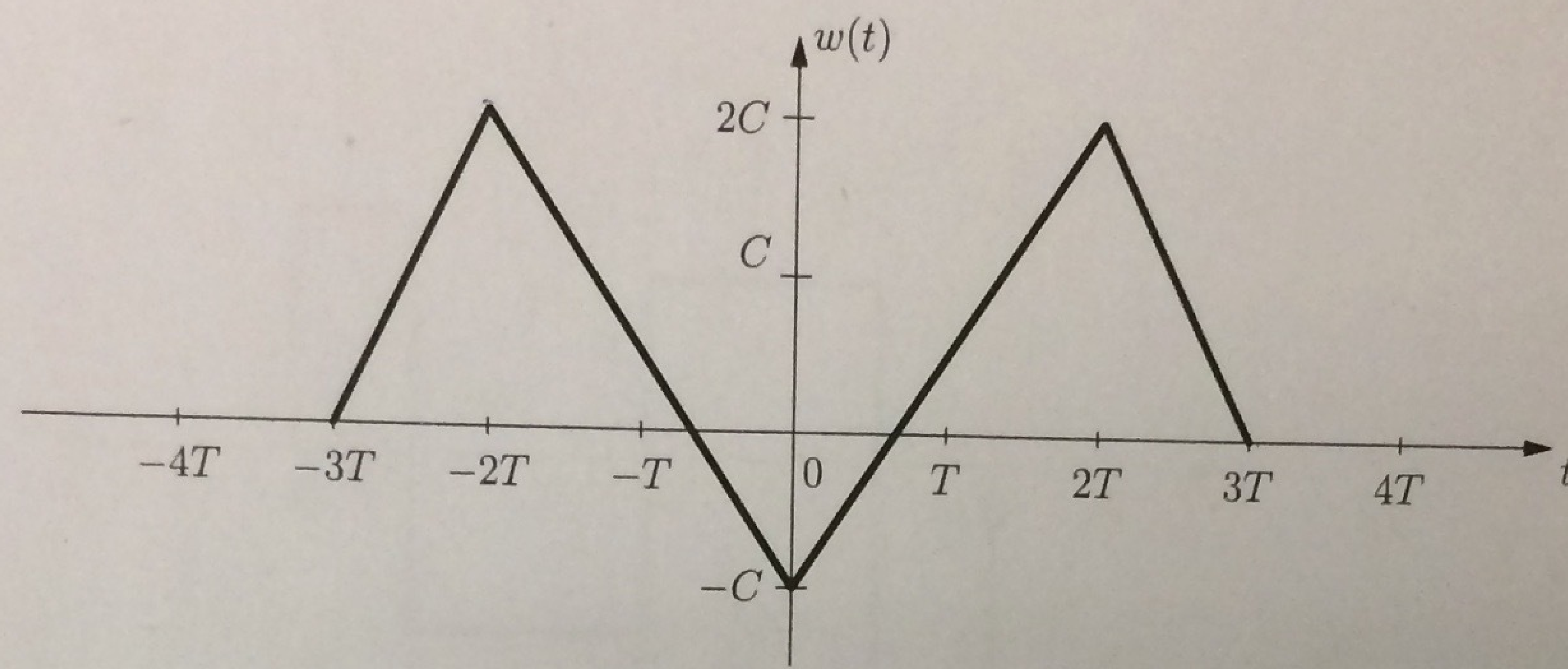
0,5 Punkte für die richtigen Nullstellen

0,5 Punkte für die maximale Amplitude $(1,5ABT)$

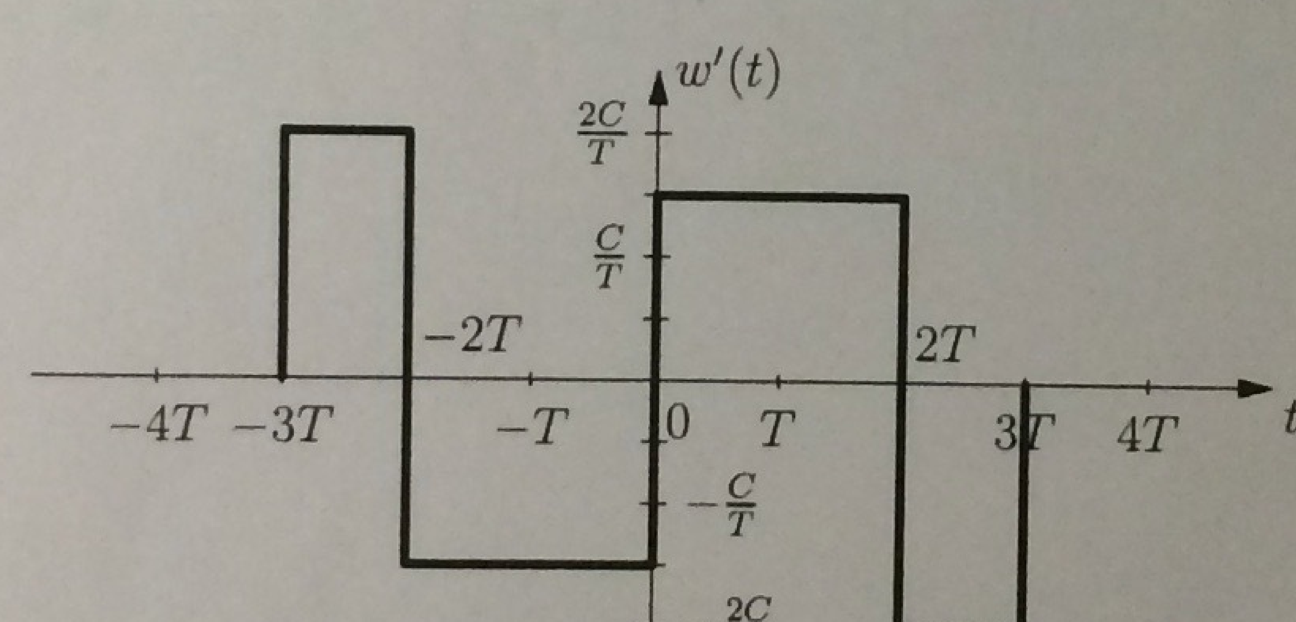
0,5 Punkte für den Kurvenverlauf

-0,5 Punkte für fehlende oder falsche Achsenbeschriftung

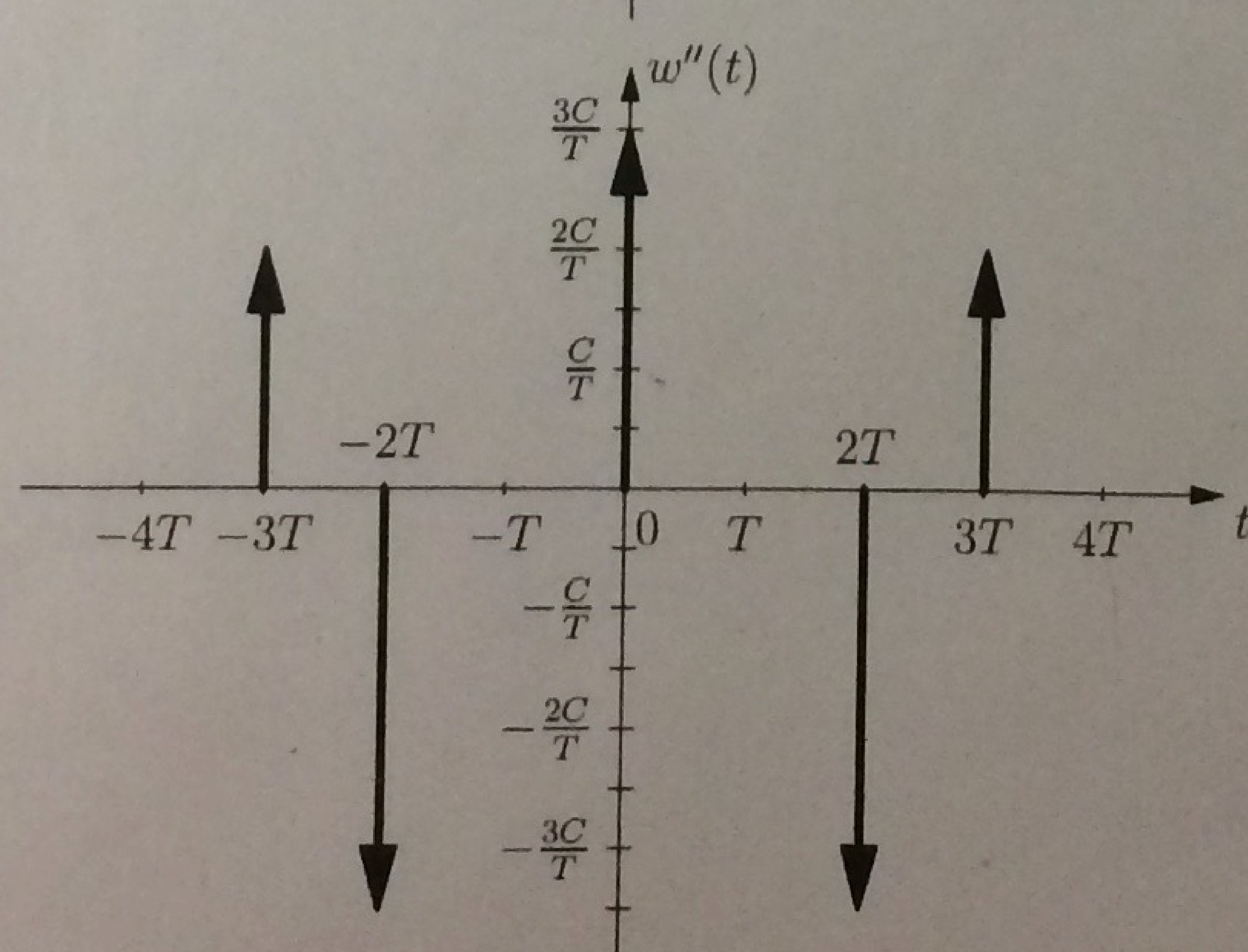
1.3 Berechnen Sie die Fouriertransformierte des folgenden Signals $w(t)$. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zu trigonometrischen Funktionen zusammen. **2 P**



1. Variante



0,5 Punkte



0,5 Punkte

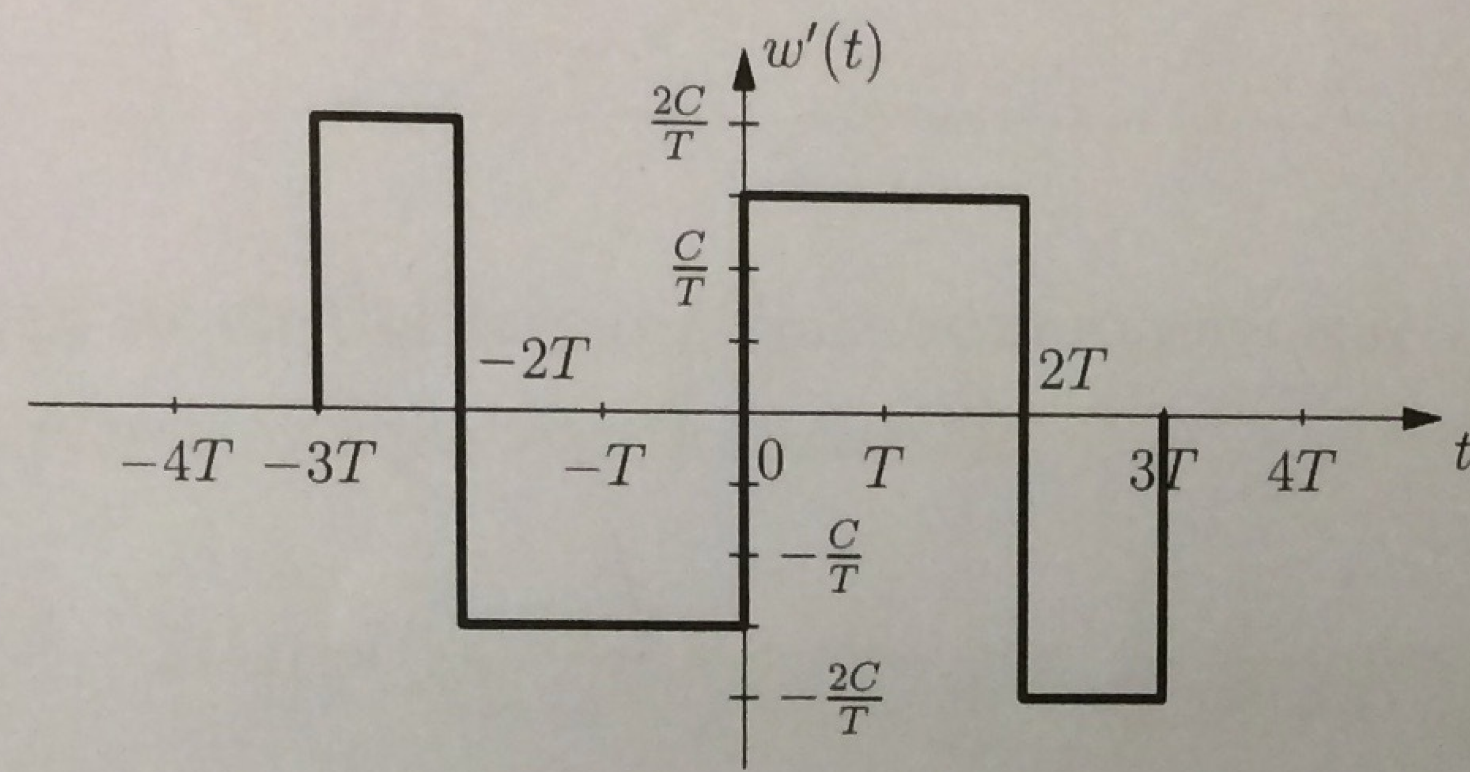
$$w''(t) = \frac{2C}{T}\delta(t+3T) - \frac{7C}{2T}\delta(t+2T) + \frac{3C}{T}\delta(t) + \frac{2C}{T}\delta(t-3T) - \frac{7C}{2T}\delta(t-2T)$$

$$(j\omega)^2 W(j\omega) = \frac{2C}{T}\left(e^{3j\omega T} + e^{-3j\omega T}\right) - \frac{7C}{2T}\left(e^{2j\omega T} + e^{-2j\omega T}\right) + \frac{3C}{T}e^{0j\omega T}$$ **0,5 Punkte**

$$W(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{2C}{T}2\cos(3\omega T) - \frac{7C}{2T}2\cos(2\omega T) + \frac{3C}{T}\right)$$

$$= -\frac{C}{\omega^2 T}\left(4cos(3\omega T) - 7cos(2\omega T) + 3\right)$$ **0,5 Punkte**

2. Variante



0,5 Punkte

$$w'(t) = \frac{2C}{T}\left(\sqcap_T(t+\frac{5}{2}T) - \sqcap_T(t-\frac{5}{2}T)\right) - \frac{3C}{2T}\left(\sqcap_{2T}(t+T) - \sqcap_{2T}(t-T)\right)$$ **0,5 Punkte**

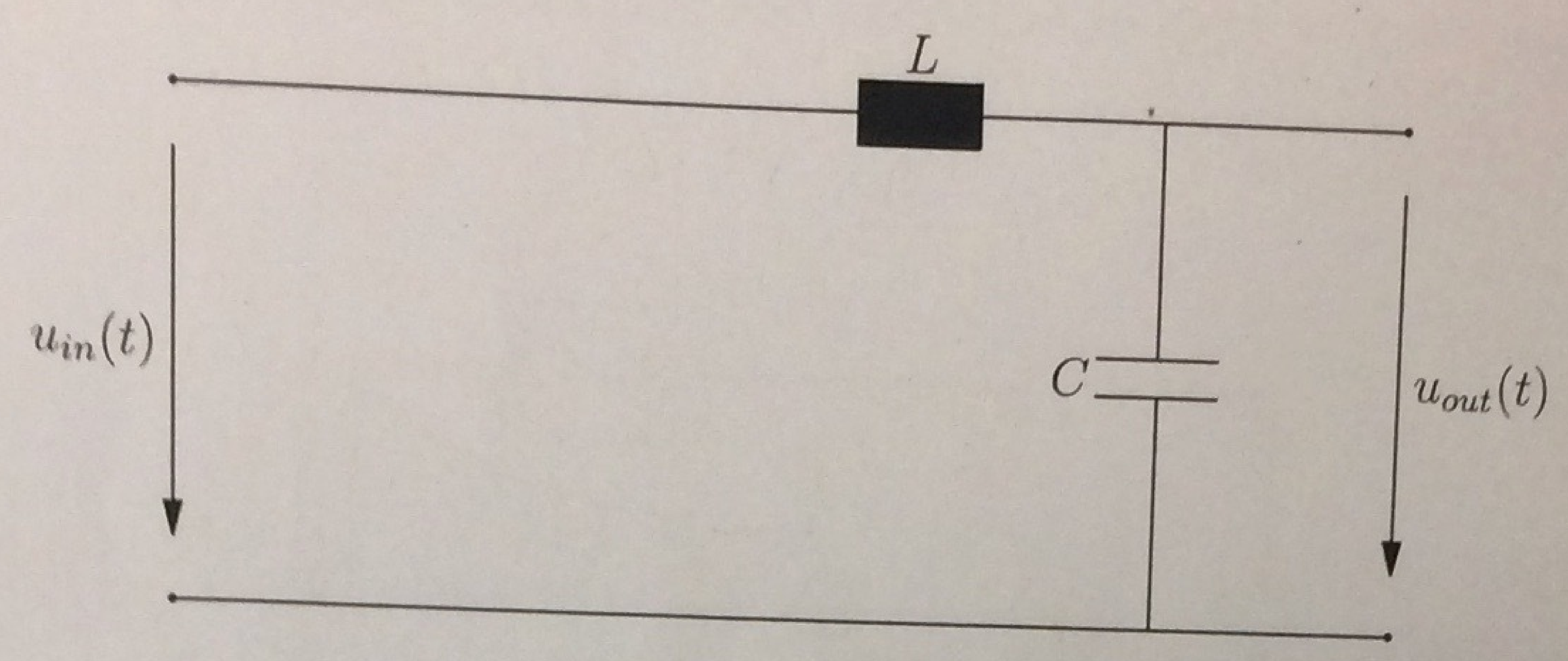
$$(j\omega)W(j\omega) = \frac{2C}{T}T\,si\left(\frac{\omega T}{2}\right)\left[e^{\frac{5}{2}j\omega T} - e^{-\frac{5}{2}j\omega T}\right] - \frac{3C}{2T}2T\,si\,(\omega T)\left[e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}\right]$$ **0,5 Punkte**

$$W(j\omega) = \frac{C}{\omega}\left[4\,si\left(\frac{\omega T}{2}\right)\sin\left(\frac{5}{2}\omega T\right) - 6\,si\,(\omega T)\sin(\omega T)\right]$$ **0,5 Punkte**

2 Zeitkontinuierliche Systeme und Abtastung — 10,5 Punkte

2.1 Gegeben sei das folgende Netzwerk.

3 P



a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems $H(s)$ im Laplacebereich unter Verwendung komplexer Impedanzen. 1 P

$$H(s) = \frac{U_{OUT}(s)}{U_{IN}(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{LCs^2+1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{LC}}$$

b) Geben Sie die Impulsantwort des Systems $h(t)$ im Zeitbereich an. Verwenden Sie zur Berechnung die Korrespondenz: $\frac{1}{s+a} \leftrightarrow e^{-at}$, für $t > 0$. 2 P

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{\left(s + j\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)\left(s - j\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)} \quad \textbf{0,5 Punkte}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{\frac{1}{LC}}{(s-s_{x1})(s-s_{x2})} = \frac{A}{(s-s_{x1})} + \frac{B}{(s-s_{x2})}$$

$$\frac{\frac{1}{LC}}{(s-s_{x1})(s-s_{x2})} = \frac{A}{(s+j\frac{1}{\sqrt{LC}})} + \frac{B}{(s-j\frac{1}{\sqrt{LC}})}$$

$$s = -j\frac{1}{\sqrt{LC}} : \frac{1}{LC} = A(-j\frac{1}{\sqrt{LC}} - j\frac{1}{\sqrt{LC}}) \Leftrightarrow A = j\frac{1}{2\sqrt{LC}} \quad \textbf{0,5 Punkte}$$

$$s = j\frac{1}{\sqrt{LC}} : \frac{1}{LC} = B(j\frac{1}{\sqrt{LC}} + j\frac{1}{\sqrt{LC}}) \Leftrightarrow B = -j\frac{1}{2\sqrt{LC}} \quad \textbf{0,5 Punkte}$$

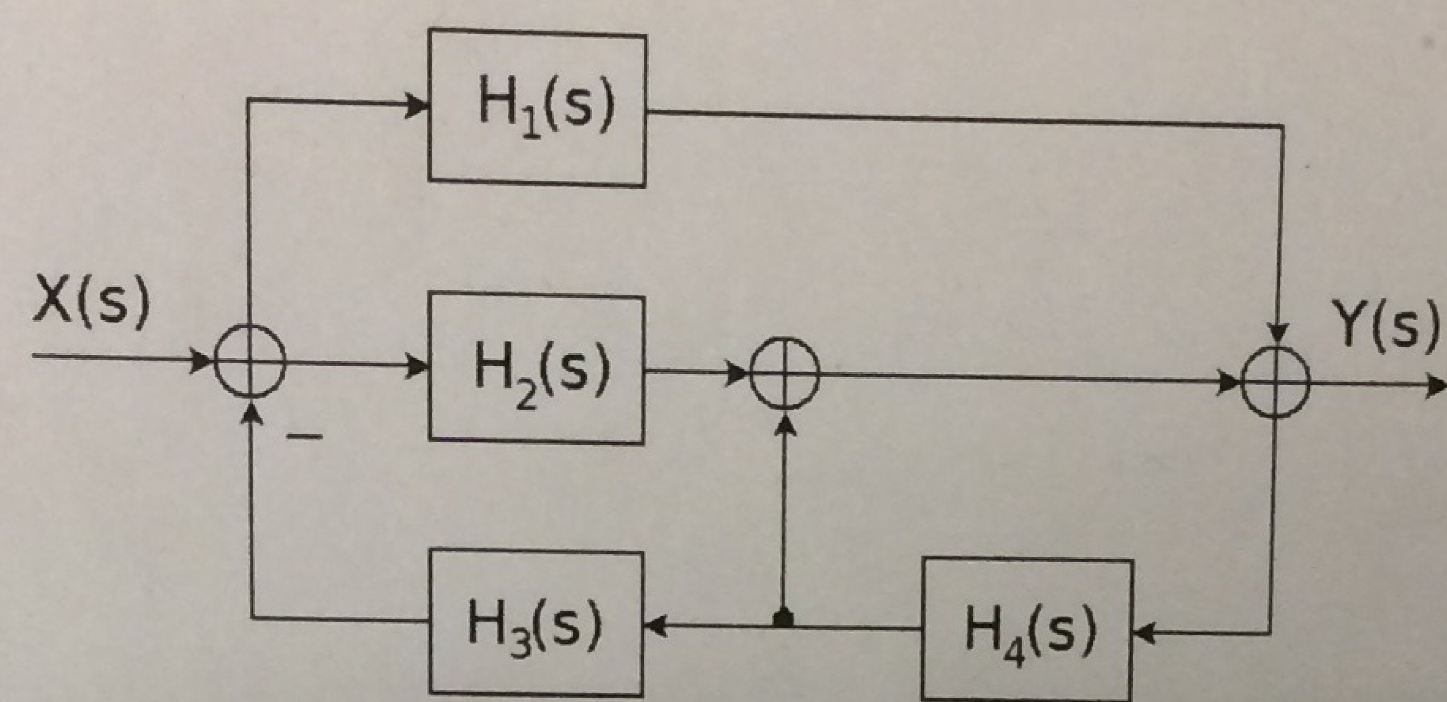
Einsetzen:

$$H(s) = \frac{j\frac{1}{\sqrt{2LC}}}{\left(s + j\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)} - \frac{j\frac{1}{\sqrt{2LC}}}{\left(s - j\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)}$$

$$\leftrightarrow h(t) = j\frac{1}{2\sqrt{LC}}e^{-j\frac{1}{\sqrt{LC}}t} - j\frac{1}{2\sqrt{LC}}e^{j\frac{1}{\sqrt{LC}}t} \quad \textbf{0,5 Punkte}$$

Lösung mit $\frac{a}{s^2+a^2} \leftrightarrow sin(at)$ aus Tabelle -1 Punkt

2.2 Gegeben sei das folgende Blockschaltbild. Geben Sie die Gesamtübertragungsfunktion $H_{\mathrm{Ges}}(s)$ in Abhängigkeit von den Einzelübertragungsfunktionen $H_i(s)$, $i = 1, \ldots, 4$ an. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zusammen. 2 P



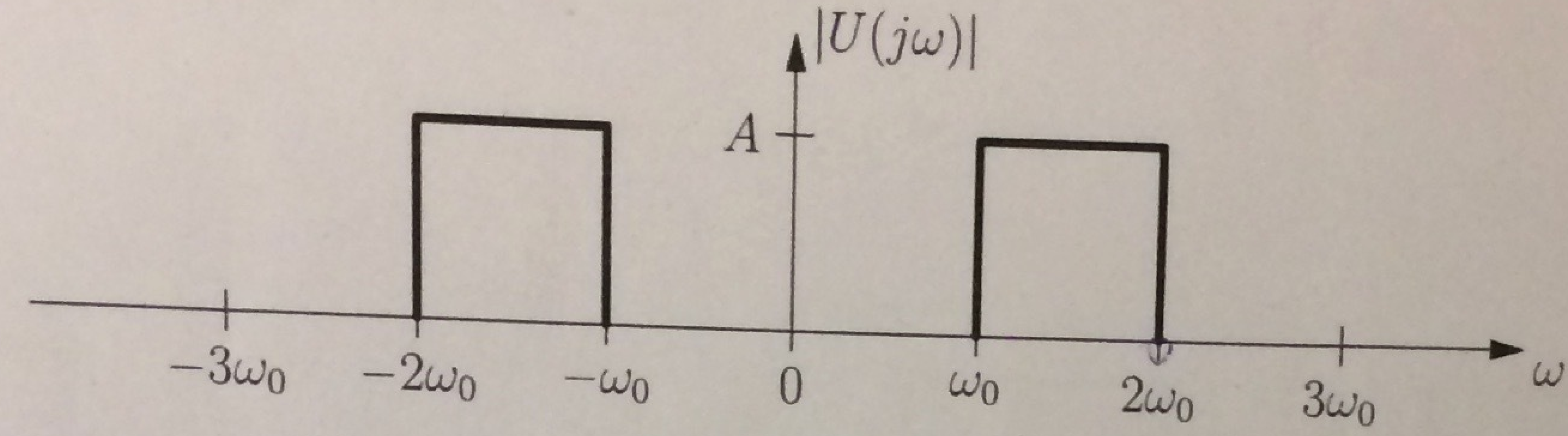
$$H(s) = \frac{H_1(s) + H_2(s)}{1 - H_4(s) + H_1(s)H_3(s)H_4(s) + H_2(s)H_3(s)H_4(s)}$$

2 Punkte für die richtige Übertragungsfunktion

oder

maximal 1,5 Punkte für richtige Zwischenergebnisse

2.3 Gegeben sei das folgende Amplitudenspektrum. Das dazugehörige Phasenspektrum sei $\varphi(\omega) = 0$. 5,5 P



a) Berechnen Sie das entsprechende Signal im Zeitbereich. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zu trigonometrischen Funktionen zusammen. 2 P

1. Variante

$$si(\omega_T \frac{t}{2}) \leftrightarrow T \cdot \sqcap_{\omega_T}(\omega),\ \omega_T = \omega_0$$

$$cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi \cdot (\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$$

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{A \cdot \sqcap_{\omega_0}(\omega) * (\delta(\omega - \frac{3}{2}\omega_0) + \delta(\omega + \frac{3}{2}\omega_0))\right\} \text{ \textbf{0,5 Punkte}}$$

$$= 2\pi\ \mathcal{F}^{-1}\{A \cdot \sqcap_{\omega_0}(\omega)\} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{(\delta(\omega - \frac{3}{2}\omega_0) + \delta(\omega + \frac{3}{2}\omega_0))\right\} \text{ \textbf{0,5 Punkte}}$$

$$= 2\pi\ A\frac{\omega_0}{2\pi} si(\omega_0 \frac{t}{2}) \cdot \frac{1}{\pi} cos(\frac{3}{2}\omega_0 t) \text{ \textbf{0,5 Punkte}}$$

$$= \frac{A\omega_0}{\pi} si(\omega_0 \frac{t}{2}) \cos(\frac{3}{2}\omega_0 t) \text{ \textbf{0,5 Punkte}}$$

2.Variante

$$U(j\omega) = \sqcap_{\omega_0}(\omega + \frac{3}{2}\omega_0) + \sqcap_{\omega_0}(\omega - \frac{3}{2}\omega_0) \text{ \textbf{0,5 Punkte}}$$

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}\{U(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-2\omega_0}^{-\omega_0} A \cdot e^{j\omega t} d\omega + \int_{\omega_0}^{2\omega_0} A \cdot e^{j\omega t} d\omega\right) \text{ \textbf{0,5 Punkte}}$$

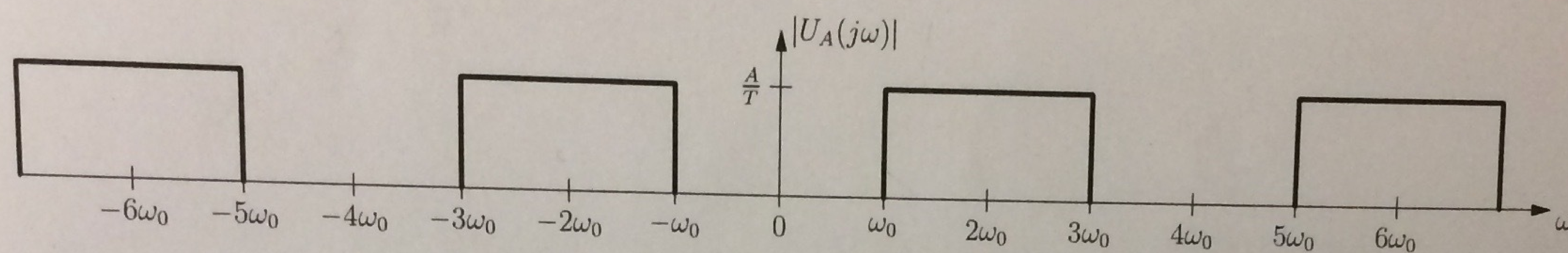
$$= \frac{A}{2\pi}\left(\left[\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\right]_{-2\omega_0}^{-\omega_0} + \left[\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\right]_{\omega_0}^{2\omega_0}\right)$$

$$= \frac{A}{\pi t}\left(\frac{1}{2j}(e^{j2\omega_0 t} - e^{-j2\omega_0 t}) - \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})\right) \text{ \textbf{0,5 Punkte}}$$

$$= \frac{A}{\pi t}(sin(2\omega_0 t) - sin(\omega_0 t)) \text{ \textbf{0,5 Punkte}}$$

b) Mit welcher Frequenz muss das Signal $u(t)$ nach dem Nyquisttheorem mindestens abgetastet werden, um eine fehlerfreie Rekonstruktion zu gewährleisten? Skizzieren Sie für diesen Fall bei idealer Abtastung das Spektrum des abgetasteten Signals im Bereich $-6\omega_0 \leq \omega \leq 6\omega_0$. 1,5 P

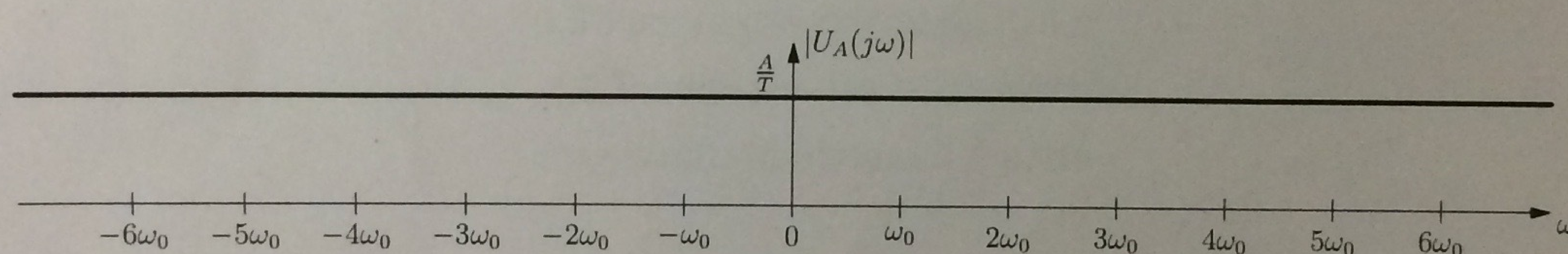
$\omega_T \geq 4\omega_0$ **0,5 Punkte**



0,5 Punkte für richtige Form und Position auf der x-Achse

0,5 Punkte für richtige Amplitude

c) Die Abtastfrequenz der idealen Abtastung betrage nun $\omega_T = 2\omega_0$. Skizzieren Sie auch für diesen Fall das abgetastete Spektrum im Bereich $-6\omega_0 \leq \omega \leq 6\omega_0$. 1 P



0,5 Punkte für richtige Form

0,5 Punkte für richtige Amplitude

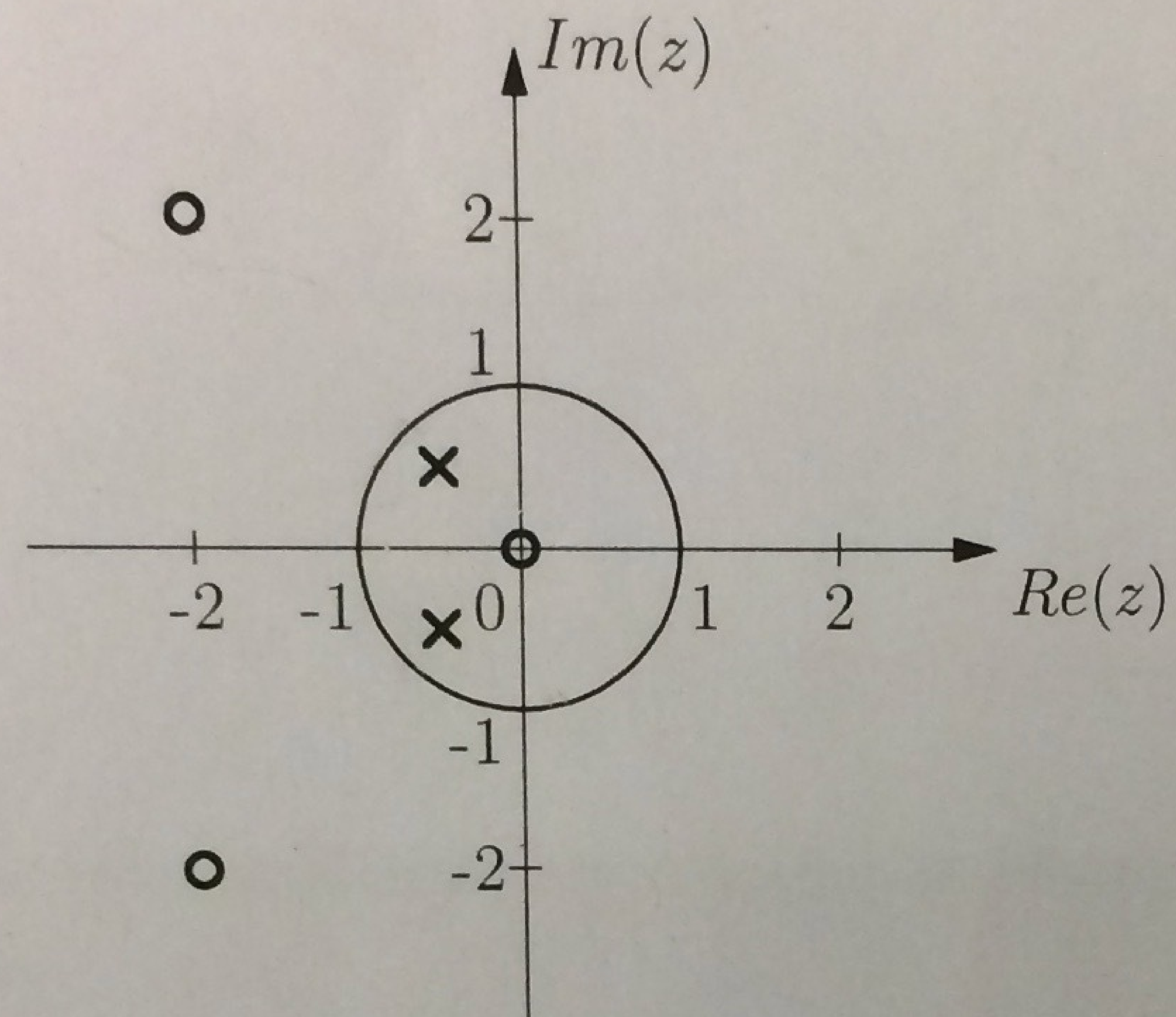
d) Welcher Effekt tritt bei Teilaufgabe 2.3 c) auf? Was bedeutet das für die Rekonstruktion des Signals? 1 P

- **Aliasing 0,5 Punkte**
- **Keine Rekonstruktion des Signals möglich 0,5 Punkte**

3 Zeitdiskrete Signale und Systeme **10,5 Punkte**

3.1 PN-Diagramme zeitdiskreter Systeme 4 P

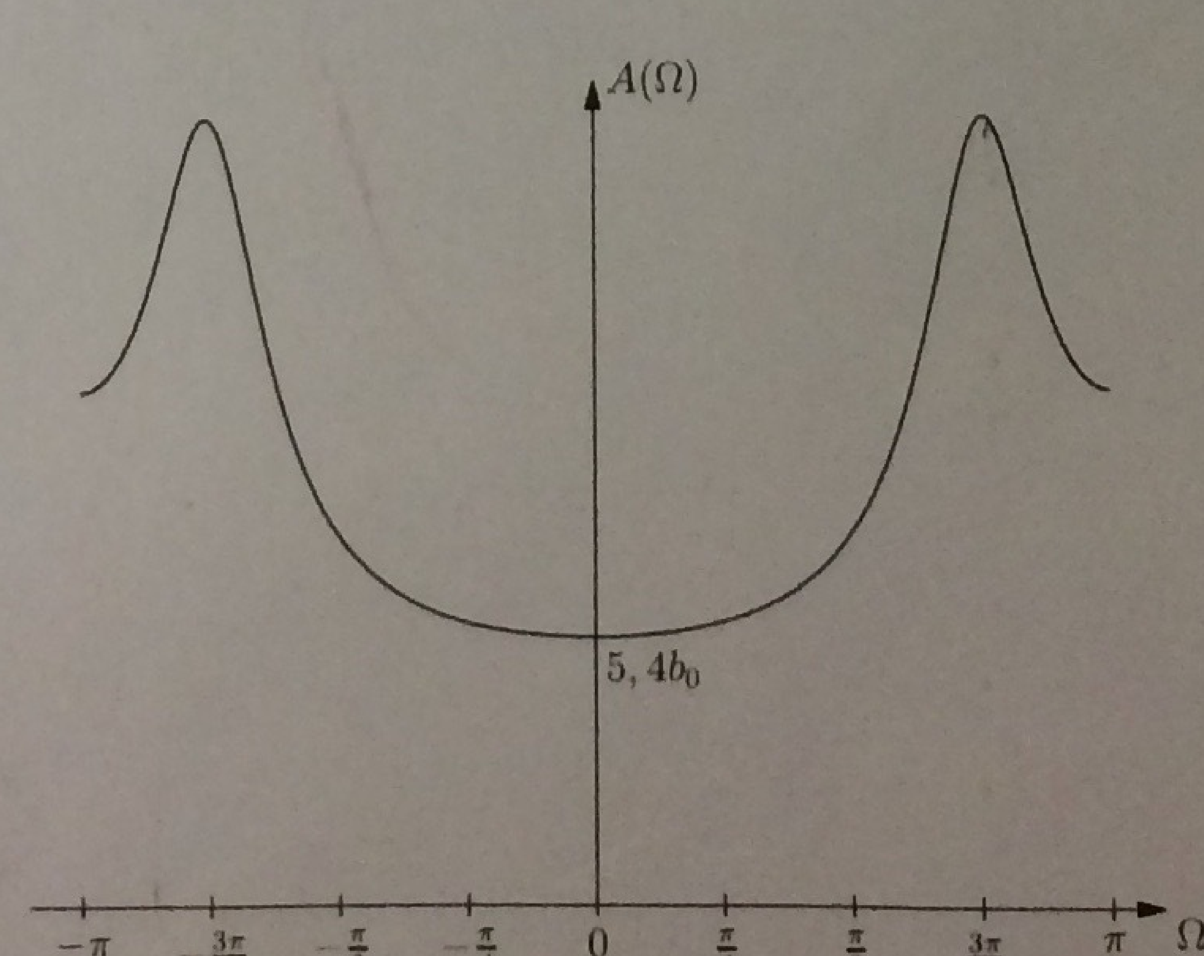
a) Gegeben sei das folgende PN-Diagramm eines zeitdiskreten Systems. Kreuzen Sie rechts die entsprechenden Eigenschaften des Systems an. 3 P



ja	nein	
☒	☐	reellwertig
☒	☐	(bedingt) stabil
☐	☒	kausal
☐	☒	linearphasig
☐	☒	Allpass
☐	☒	minimalphasig

0,5 Punkte pro richtigem Kreuz
-0,5 Punkte pro falschem Kreuz
insgesamt: Minimum 0 Punkte

b) Skizzieren Sie den Amplitudengang des Systems. 1 P

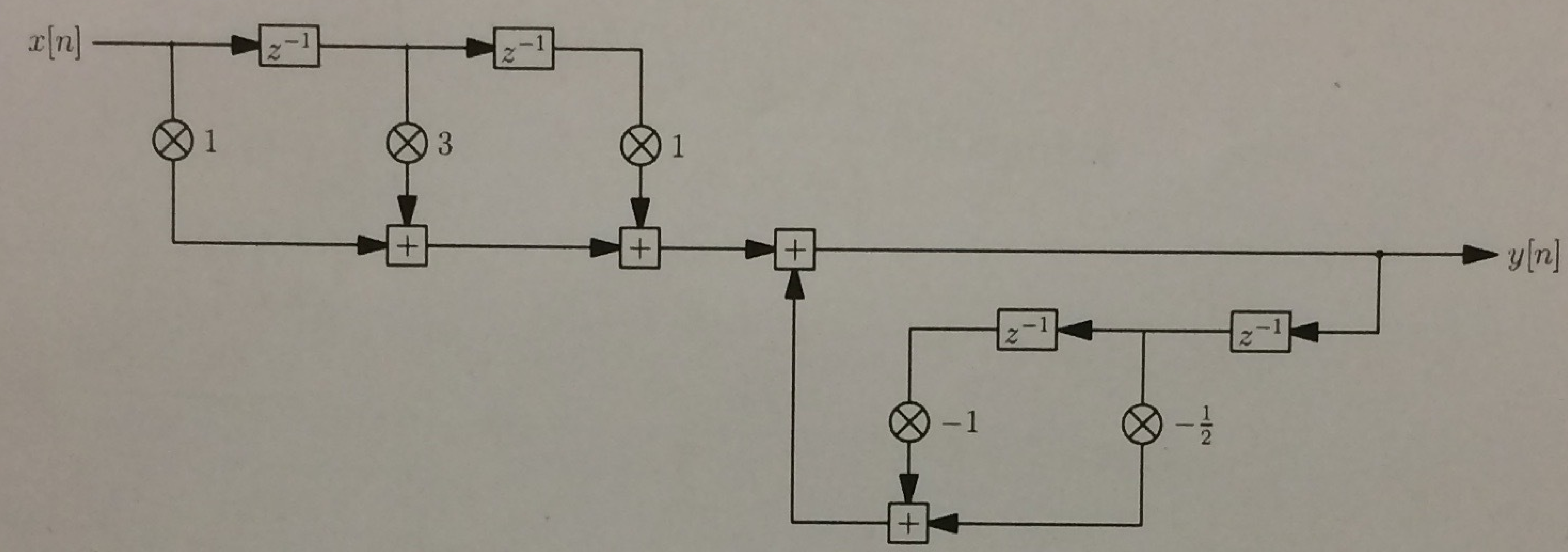


0,5 Punkte für Form
0,5 Punkte für die Beschriftung y-Achse ($5,4b_0$ oder $5,4$)

3.2 Gegeben sei die folgende Differenzengleichung eines zeitdiskreten Filters. 5,5 P

$$y(n) = x(n) + 3x(n-1) + x(n-2) - \frac{1}{2}y(n-1) - y(n-2)$$

a) Skizzieren Sie die Struktur des Filters. 1 P



b) Handelt es sich um ein FIR- oder IIR-Filter? 0,5 P

IIR-Filter

c) Berechnen Sie die ersten vier Elemente der Impulsantwort des Filters. 1 P

$$h = \left\{1; \frac{5}{2}; -\frac{5}{4}; -\frac{15}{8}; \ldots\right\} = \{1; 2,5; -1,25; -1,875; \ldots\}$$

0,5 Punkte für je zwei richtige Elemente

d) Geben Sie die Systemfunktion des Filters an und bestimmen Sie die Lage der Pol- und Nullstellen. 2 P

$$Y(z) = X(z) + 3z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) - z^{-2}Y(z) \text{ } \mathbf{0{,}5\ Punkte}$$

$$Y(z)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2}\right) = X(z)\left(1 + 3z^{-1} + z^{-2}\right)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 3z^{-1} + z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z^2 + 3z + 1}{z^2 + \frac{1}{2}z + 1} \text{ } \mathbf{0{,}5\ Punkte}$$

$$z_{o1/o2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$z_{o1} = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} = -2,61; \; z_{o2} = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} = -0,38 \text{ } \mathbf{0{,}5\ Punkte}$$

$$z_{x1/x2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{-\frac{15}{16}} = -\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{15}}{4} = -0,25 \pm 0,97j \text{ } \mathbf{0{,}5\ Punkte}$$

e) Nennen Sie die notwendigen Eigenschaften eines verzerrungsfreien Filters. 1 P

- **Konstanter Amplitudengang 0,5 Punkte**
- **Lineare Phasengang 0,5 Punkte**

3.3 Gegeben seien die Signale $u = \{3, 0, 1\}$ und $v = \{-1, 2, 0\}$. Berechnen Sie Faltung und zyklische Faltung beider Signale. 1 P

normale Faltung: $u * v = \{-3; 6; -1; 2; 0\}$

zyklische Faltung: $u *_{zykl} v = \{...; -1; 6; -1; ...\}$

0,5 Punkte für Summenfaltung

0,5 Punkte für zyklischer Faltung