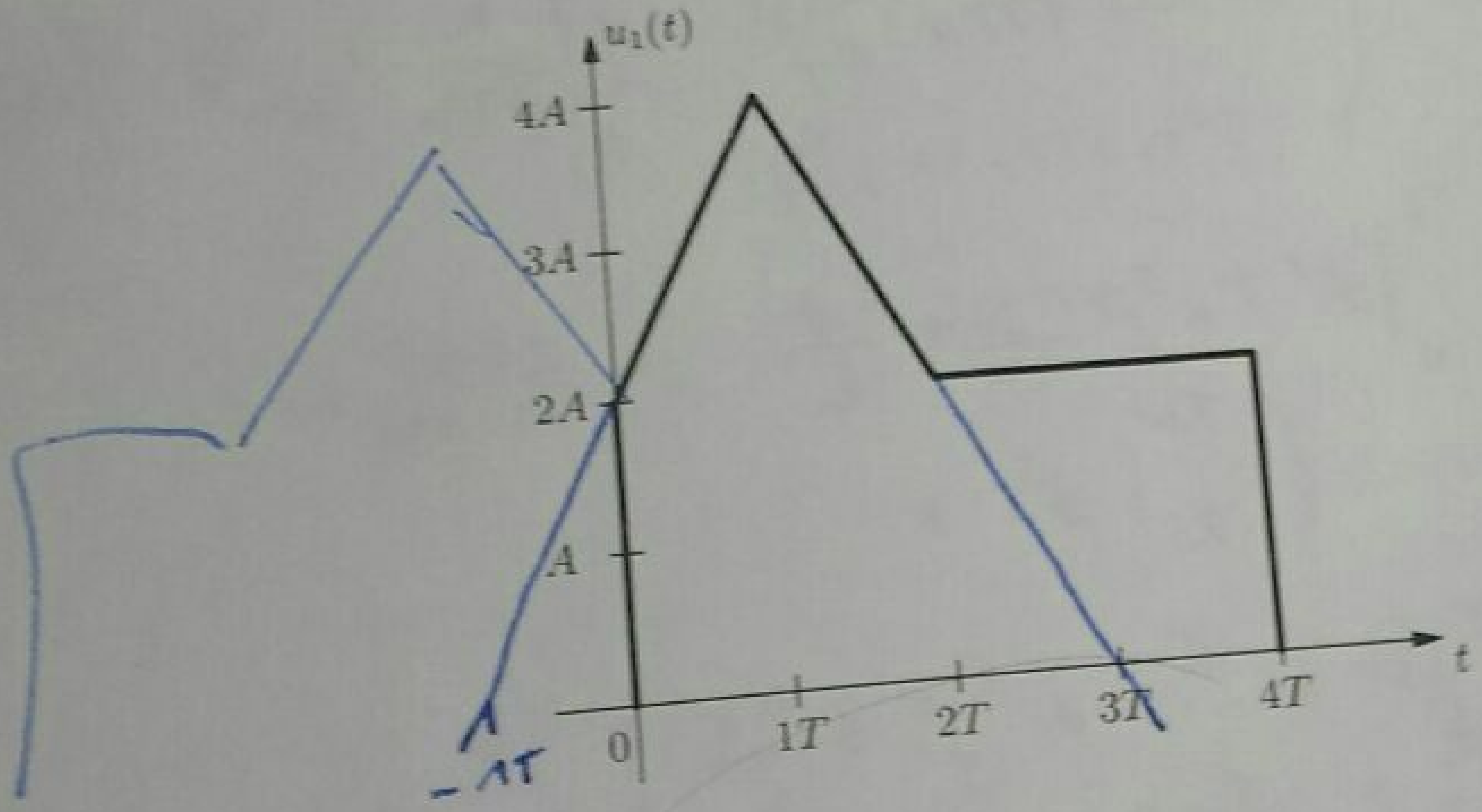
# 1 Zeitkontinuierliche Signale

**11 Punkte**

3,5 P

1.1 Gegeben sei das folgende, zeitkontinuierliche Signal $u_1(t)$:




1 P

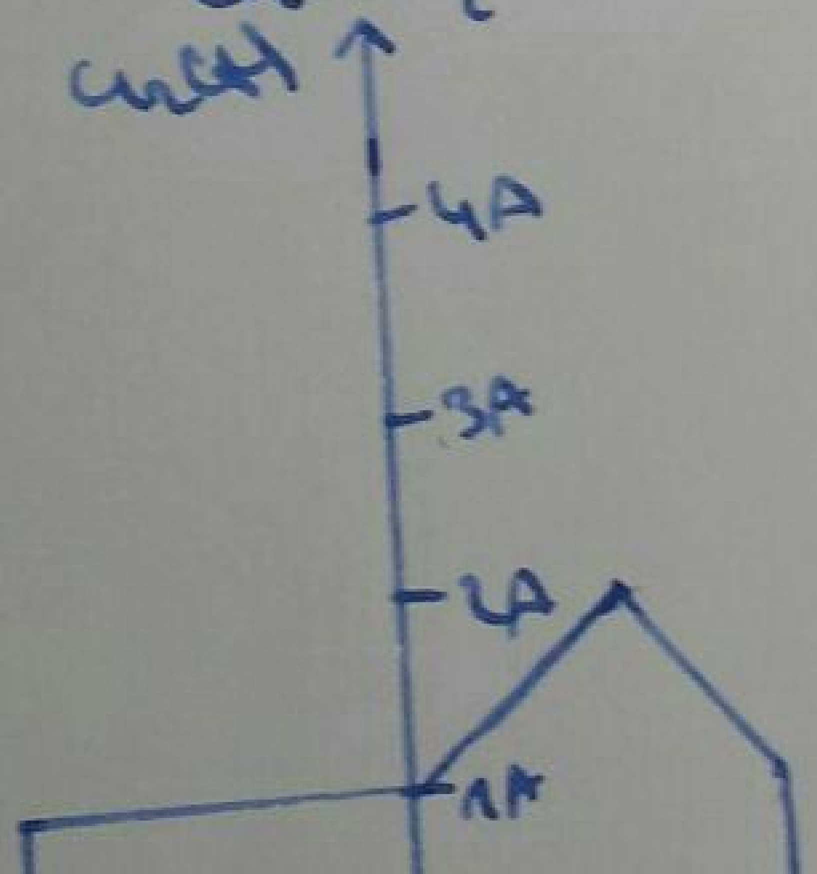
a) Geben Sie eine geschlossene mathematische Beschreibung von $u_1(t)$ unter Zuhilfenahme von Elementarsignalen an.

$$u_1(t) = \sqcap_T\left(t-\tfrac{1}{2}T\right)\cdot\frac{2A}{T}(t+T) + \sqcap_T(t-1{,}5T)\cdot\left(-\frac{2A}{T}\right)\left(t-\frac{5T}{2}\right)$$
$$+ 2\sqcap_{2T}(t-3T)$$

1 P

b) Skizzieren Sie das Signal $u_2(t) = \frac{1}{2}u_1(-t+2T)$.

$u_2(t) = \frac{1}{2}u_1(-1(t-2T))$



c) Das Signal $u_1(t)$ werden mit $T_P = 10T$ periodisch fortgesetzt. Bestimmen Sie die Leistung des periodisch fortgesetzten Signals $u_P(t) = u_1(t) * \delta_{T_P}(t)$. 1 P

$$P_{u_P} = \frac{1}{10T}\left[\int_0^T \frac{4A^2}{T^2}(t+T)^2\,dt + \int_T^{2T} \frac{4A^2}{T^2}\left(t-\frac{3}{2}T\right)^2 dt + \int_{2T}^{4T} 4A^2\,dt\right]$$

$$\frac{4A^2}{T^2}(t^2+2Tt+T^2) \qquad t^2-3Tt+\frac{9T^2}{4}$$

$$= \frac{4A^2}{4T\cdot T^2}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{2Tt^2}{2}+T^2t\Big|_0^T + \frac{t^3}{3}-\frac{3Tt^2}{2}+\frac{9}{4}T^2t\Big|_T^{2T} + T^2t\Big|_{2T}^{4T}\right)$$

$$= \frac{A^2}{T^3}\left(\frac{T^3}{3}+\frac{T^3}{2}+T^3+\frac{8T^3}{3}-6T^3+\frac{9}{2}T^3-\left(\frac{T^3}{3}-\frac{3T^3}{2}+\frac{9}{4}T^3\right)+4T^3-2T^3\right)$$

$$= \cancel{\frac{21}{4}A^2} = \frac{53}{12}A^2$$

$$\frac{8}{3}A^2$$

Einfach immer im TS eingeben

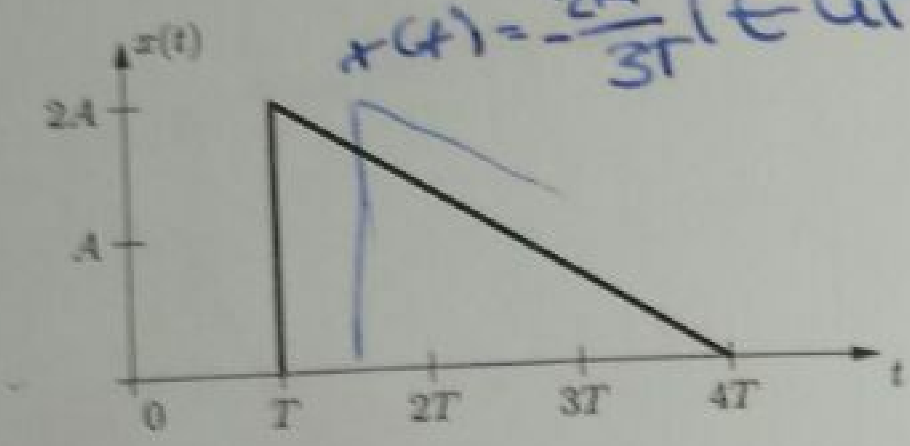
d) Wie groß ist die Energie des periodisch fortgesetzten Signals $u_P(t)$? 0,5 P

$$W_{u_P} \to \infty$$

| | | |
|---|---|---|
| Technische Universität Berlin<br>Fachgebiet Nachrichtenübertragung<br>Prof. Dr.-Ing. T. Sikora | Klausur im Lehrgebiet<br>Signale und Systeme<br>am 01.10.2015 | Blatt: 5 |

**1.2** Gegeben sei das Signal $x(t)$. **5,5 P**

$x(t) = -\frac{2A}{3T}(t-4T)$




a) Berechnen Sie für das gegebene Signal $x(t)$ die Autokorrelationsfunktion $r_{xx}(\tau)$. Fassen Sie das Ergebnis soweit wie möglich zusammen. **3 P**

linke Grenze: $t+\tau = T$, $t_L = T-\tau$

rechte Grenze: $t+\tau = 4T$, $t_R = 4T-\tau$

1. Fall: $t_R < T \Rightarrow 4T-\tau < T \Rightarrow \boxed{3T \le \tau}$, $r_{xx}(\tau) = 0$

2. Fall: $t_R > T \wedge t_R < 4T \Rightarrow 4T-\tau > T \wedge 4T-\tau < 4T$

$\Rightarrow \boxed{0T \le \tau < 3T}$

$$r_{xx}(\tau) = \int_0^{4T-\tau} \left(-\frac{2A}{3T}(t-4T)\right)^2 dt = \int_0^{4T-\tau} \frac{4A^2}{9T^2}\left(t^2 - 8Tt + 16T^2\right) dt$$

$$= \frac{4A^2}{9T^2}\left(\frac{(4T-\tau)^3}{3} - \frac{8T}{2}(4T-\tau)^2 + 16T^2(4T-\tau)\right)$$

$$= \frac{4A^2}{9T^2}\left(\frac{1}{3}\left(16T^2 - 8T\tau + \tau^2\right)(4T-\tau) - 4T\left(\tau^2 - 8T\tau + 16T^2\right) + 16T^2(4T-\tau)\right)$$

$$= \frac{4A^2}{9T^2}\left(\frac{1}{3}\left(64T^3 - 16T^2\tau - 32T^2\tau + 8T\tau^2 + 4T\tau^2 - \tau^3\right) - 4T\tau^2 + 32T^2\tau - 64T^3 + 64T^3 - 16T^2\tau\right)$$

$$= \left(\frac{64T^3}{3} - 16T^2\tau + 4T\tau^2 - \frac{\tau^3}{3} - 16T^2\tau - 4T\tau^2\right)\frac{4A^2}{9T^2}$$

$$= \left(-\frac{\tau^3}{3} - 32T^2\tau + \frac{64T^3}{3}\right)\frac{4A^2}{9T^2}$$

$$r_{xx}(\tau) = \int_T^{4T-\tau} \frac{2A}{3T}(t-4T)\,\frac{2A}{3T}(t+\tau-4T)\,dt = \frac{4A^2}{9T^2}\left(\frac{1}{6}\tau^3 + 9T^3 - \frac{9}{2}T^2\tau\right)$$

3. Fall: $r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau)$

| Technische Universität Berlin<br>Fachgebiet Nachrichtenübertragung<br>Prof. Dr.-Ing. T. Sikora | Klausur im Lehrgebiet<br>Signale und Systeme<br>am 01.10.2015 | Blatt: 6 |
|---|---|---|

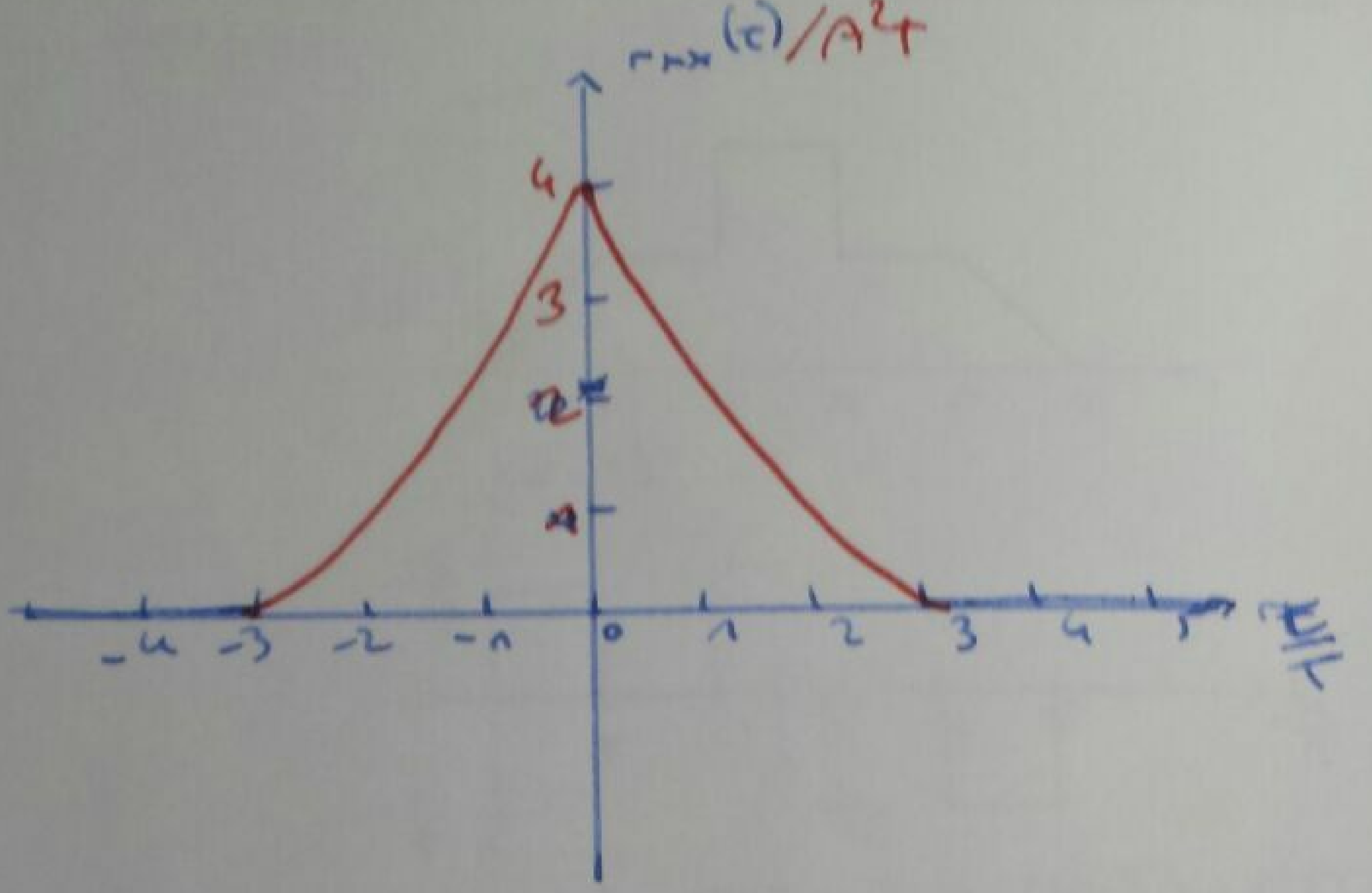
3. Fall: $\boxed{-3T \le \tau < 0}$

$$r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau) = \left(\frac{\tau^3}{3} + 32T^2\tau + \frac{64}{3}T^3\right)\frac{4A^2}{9T^2}$$

4. Fall: $\boxed{\tau < -3T}$

$r_{xx}(\tau) = 0$

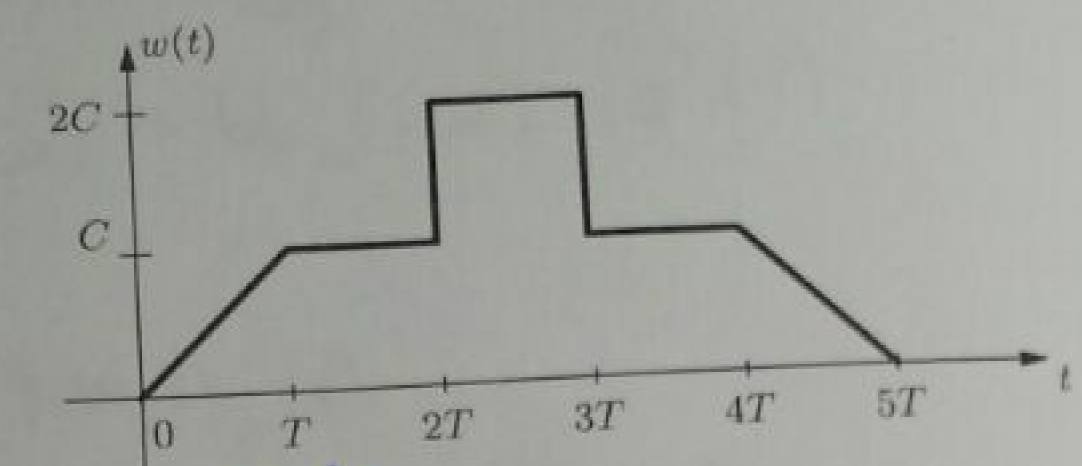
b) Skizzieren Sie $r_{xx}(\tau)$ im Bereich $-4T \leq \tau \leq 4T$. 1,5 P

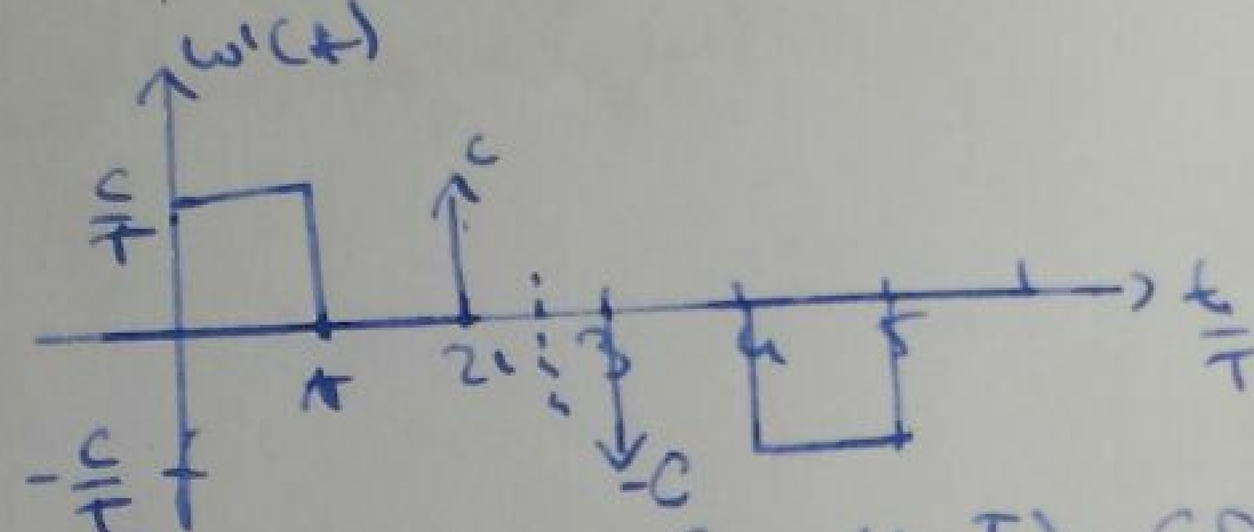



c) Wann wird $r_{xx}(\tau)$ maximal? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P

$r_{xx}(\tau)$ wird bei $\tau = 0$ maximal, da in diesem Fall die maximale Überdeckung / größte Ähnlichkeit vorliegt.

1.3 Berechnen Sie die Fouriertransformierte des folgenden Signals $w(t)$. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zu trigonometrischen Funktionen zusammen. 2 P




$$w'(t) = \frac{C}{T}\Pi_T\left(t-\frac{T}{2}\right) + C\delta(t-2T) - C\delta(t-3T) - \frac{C}{T}\Pi_T\left(t-\frac{9}{2}T\right)$$

$$(j\omega)\,W(j\omega) = C\,si\left(\omega\frac{T}{2}\right)e^{-j\omega\frac{T}{2}} + Ce^{-j\omega 2T} - Ce^{-j\omega 3T} - C\,si\left(\omega\frac{T}{2}\right)e^{-j\omega\frac{9}{2}T}$$

$$(j\omega)\,W(j\omega) = C\left(si\left(\omega\frac{T}{2}\right)\left(e^{-j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{9}{2}T}\right) + e^{-j\omega 2T} - e^{-j\omega 3T}\right)$$

$$= C\left(si\left(\omega\frac{T}{2}\right)e^{-j\omega 2{,}5T}\left(e^{j\omega 2T} - e^{-j\omega 2T}\right) + e^{j\omega 0{,}5T} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}\right)$$

$$= C\left(e^{-j\omega 2{,}5T}\left(si\left(\omega\frac{T}{2}\right)\cdot 2j\sin(\omega 2T) + 2j\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right)\right)\right)$$

$$W(j\omega) = \frac{2C}{\omega}\left(e^{-j\omega 2{,}5T}\left(si\left(\omega\frac{T}{2}\right)\cdot\sin(\omega 2T) + \sin\left(\omega\frac{T}{2}\right)\right)\right)$$ ✓

$e^{-j\cdot 4\cdot\frac{2\pi}{5}}$

1.4 Zeigen Sie, dass periodische Signale ein frequenzdiskretes Spektrum aufweisen. 1* P

$u_1(t) * \delta_{T_p}(t) = u_{1T_p}(t)$

$U(j\omega) = U_1(j\omega) \cdot \Sigma\delta(t).$

$u_p(t) = u(t) * \delta_{T_p}(t)$

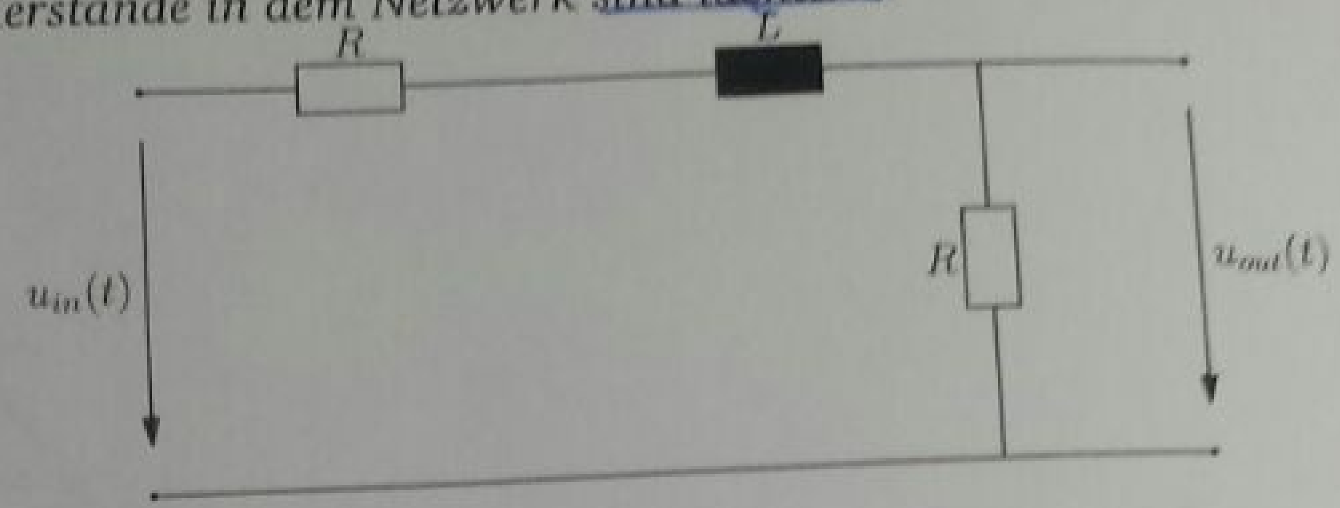
$U_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} U(j\omega) \cdot \omega_{T_p} \cdot \delta_{T_p}(\omega)$

$\omega_{T_p} = \frac{2\pi}{T_p}$

## 2 Zeitkontinuierliche Systeme — 8 Punkte

2.1 Gegeben sei das folgende Netzwerk. — 3 P

*Hinweis: Beide Widerstände in dem Netzwerk sind identisch!*




a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems $H(s)$ im Laplacebereich unter Verwendung komplexer Impedanzen. — 1 P

$$U_{in}(s) = R + sL + R = 2R + sL$$

$$U_{out}(s) = R$$

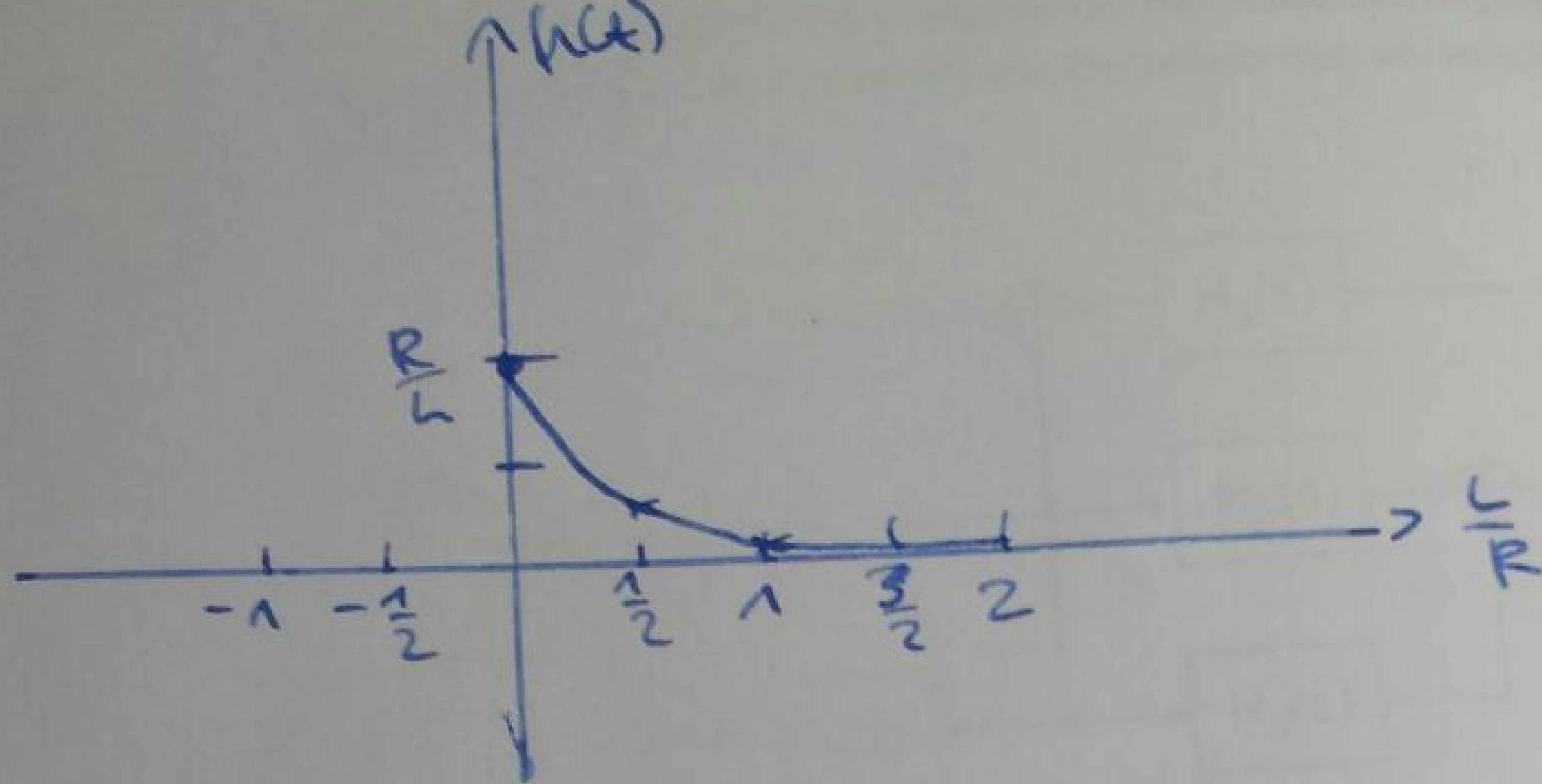
$$H(s) = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \cancel{\frac{2R+sL}{R}} = \frac{R}{2R+sL} = \frac{1}{2+s\frac{L}{R}} = \frac{1}{s\frac{L}{R}-(-2)}$$

$$= \frac{R}{L} \cdot \frac{1}{s-\left(-\frac{2R}{L}\right)}$$

b) Geben Sie die Impulsantwort des Systems $h(t)$ im Zeitbereich an. — 1 P

$$h(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{2R}{L}t} \qquad \forall t \geq 0$$

c) Skizzieren Sie die Impulsantwort des Systems im Bereich $-\frac{L}{R} \leq t \leq \frac{2L}{R}$. 1 P

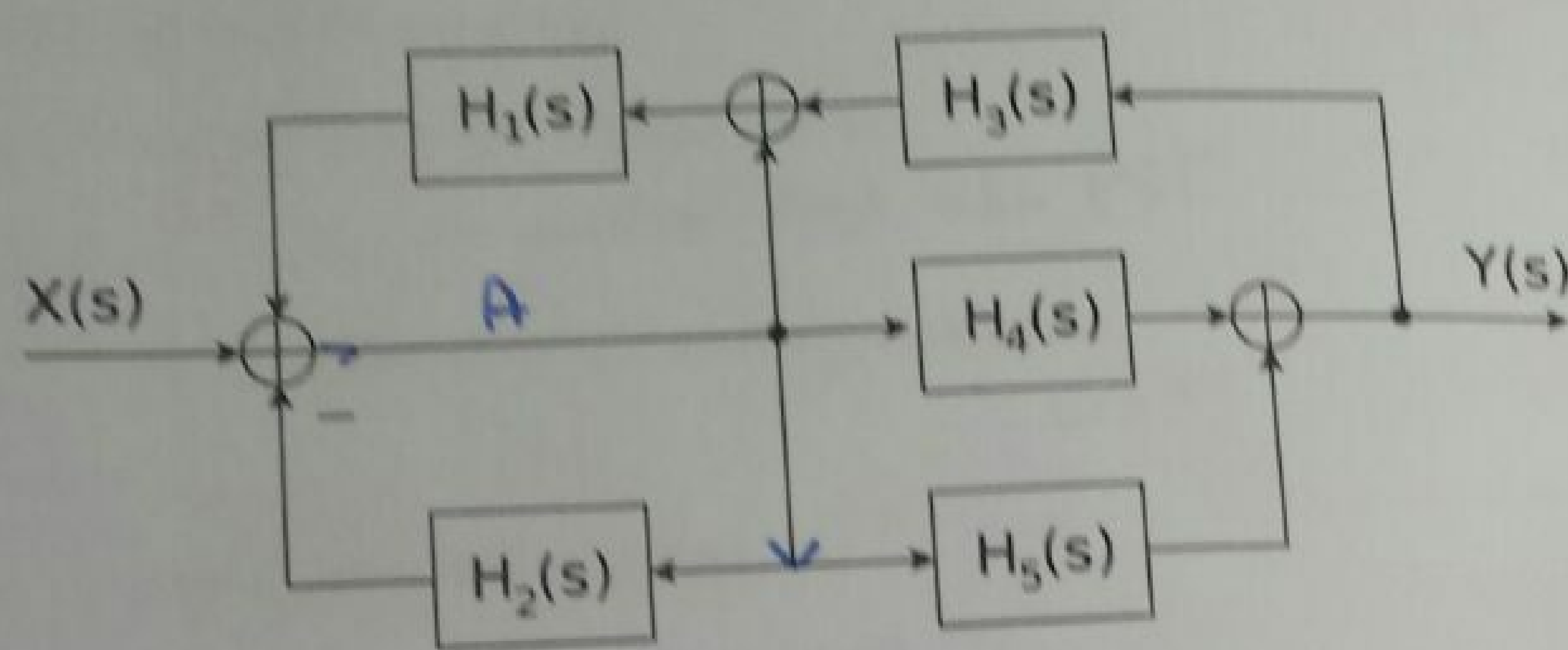



$\frac{1}{2} \to 0{,}368$

$1 \quad 0{,}135$

$\frac{3}{2} \quad 0{,}049$

2.2 Gegeben sei das folgende Blockschaltbild. Geben Sie die Gesamtübertragungsfunktion $H_{\text{Ges}}(s)$ in Abhängigkeit von den Einzelübertragungsfunktionen $H_i(s)$, $i = 1, \ldots, 5$ an. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zusammen. 2 P




$\cancel{Y = H_4 ( X + H_1 ( H_3 Y}$

$Y = H_4 A + H_5 A$

$A = X + H_1 ( H_3 Y + A ) - H_2 A$

$\phantom{A} = X + H_1 H_3 Y + H_1 A - H_2 A$

$A (1 - H_1 + H_2) = X + H_1 H_3 Y$

$A = \frac{X + H_1 H_3 Y}{1 - H_1 + H_2}$

$Y = \frac{H_4 X + H_1 H_3 H_4 Y}{1 - H_1 + H_2} + \frac{H_5 X + H_1 H_3 H_5 Y}{1 - H_1 + H_2} = \cancel{H_4 X + H_5 X + H_1 H_3 H_4}$

$= \frac{X (H_4 + H_5) + Y (H_1 H_3 H_4 + H_1 H_3 H_5)}{1 - H_1 + H_2}$

$Y - H_1 Y + H_2 Y = X (H_4 + H_5) + Y (H_1 H_3 H_4 + H_1 H_3 H_5)$

$X (H_4 + H_5) = Y - H_1 Y + H_2 Y - H_1 H_3 H_4 Y - H_1 H_3 H_5 Y$

$H_{Ges} = \frac{Y}{X} = \frac{H_4 + H_5}{1 - H_1 + H_2 - H_1 H_3 H_4 - H_1 H_3 H_5}$ ✓

real oder kompl. konj.

**2.3** Von einem realen, zeitkontinuierlichen System seien nachfolgende Eigenschaften bekannt. Skizzieren Sie das PN-Diagramm des Systems. Erläutern Sie Ihre Schlussfolgerungen aus den genannten Eigenschaften. 3 P

a) Das System hat 6 Extremstellen.

b) Der Realteil mindestens einer Polstelle ist -2.

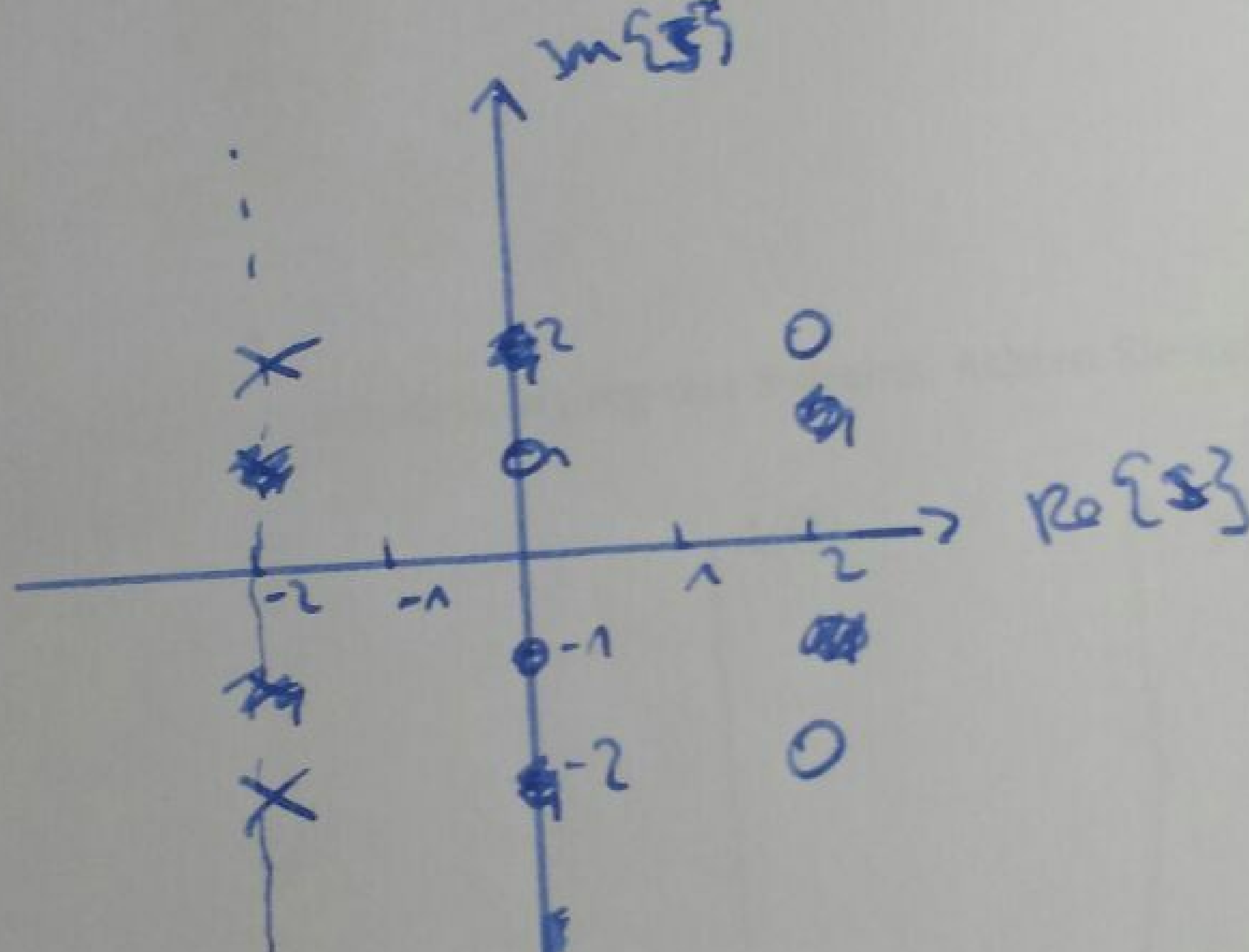
c) $\lim\limits_{\omega \to \infty} |H(j\omega)| \to \infty$ → mehr Nst als PST

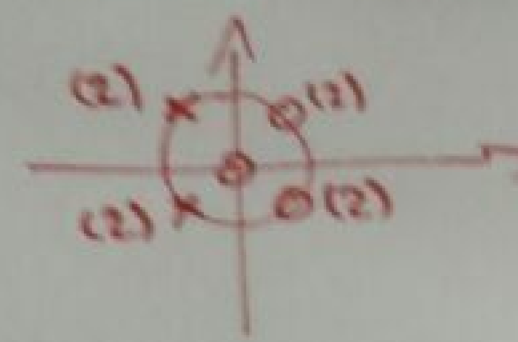
d) Der Minimalphasenanteil besteht aus zwei Nullstellen.

$\omega = 1$

e) $H(1j) = 0$.

f) Der Imaginärteil einer Nullstelle ist 2.





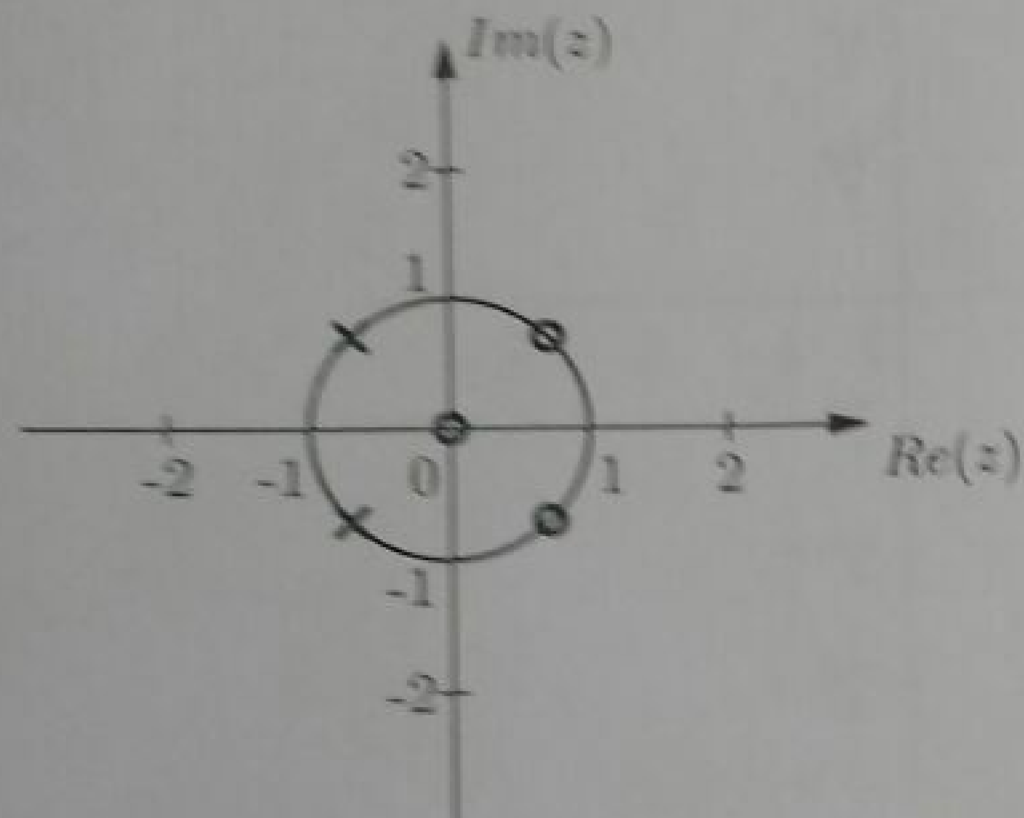

← ist das linearphasig? Ja, da Nst. im Ursprung



## 3 Zeitdiskrete Signale und Systeme — 13,5 Punkte

### 3.1 PN-Diagramme zeitdiskreter Systeme — 5,5 P

**a)** Gegeben sei das folgende PN-Diagramm eines zeitdiskreten Systems. Kreuzen Sie rechts die entsprechenden Eigenschaften des Systems an. — 3 P

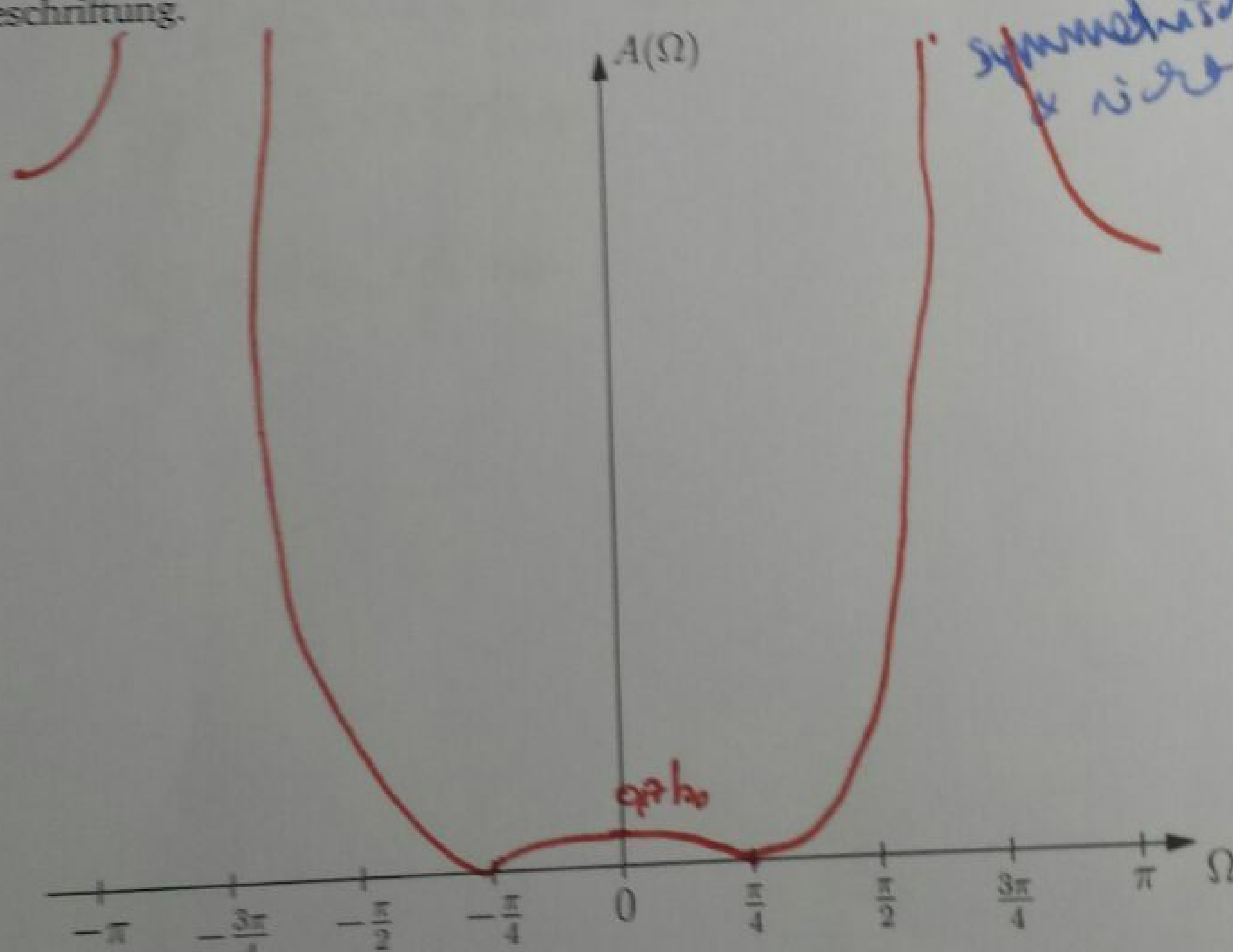



| ja | nein | |
|---|---|---|
| ☒ | ☐ | reellwertig |
| ☒ | ☐ | (bedingt) stabil |
| ☐ | ☒ | kausal |
| ☒ | ☒ | linearphasig |
| ☐ | ☒ | Allpass |
| ☒ | ☐ | minimalphasig |

$+ 6e^{-j4\cdot}$

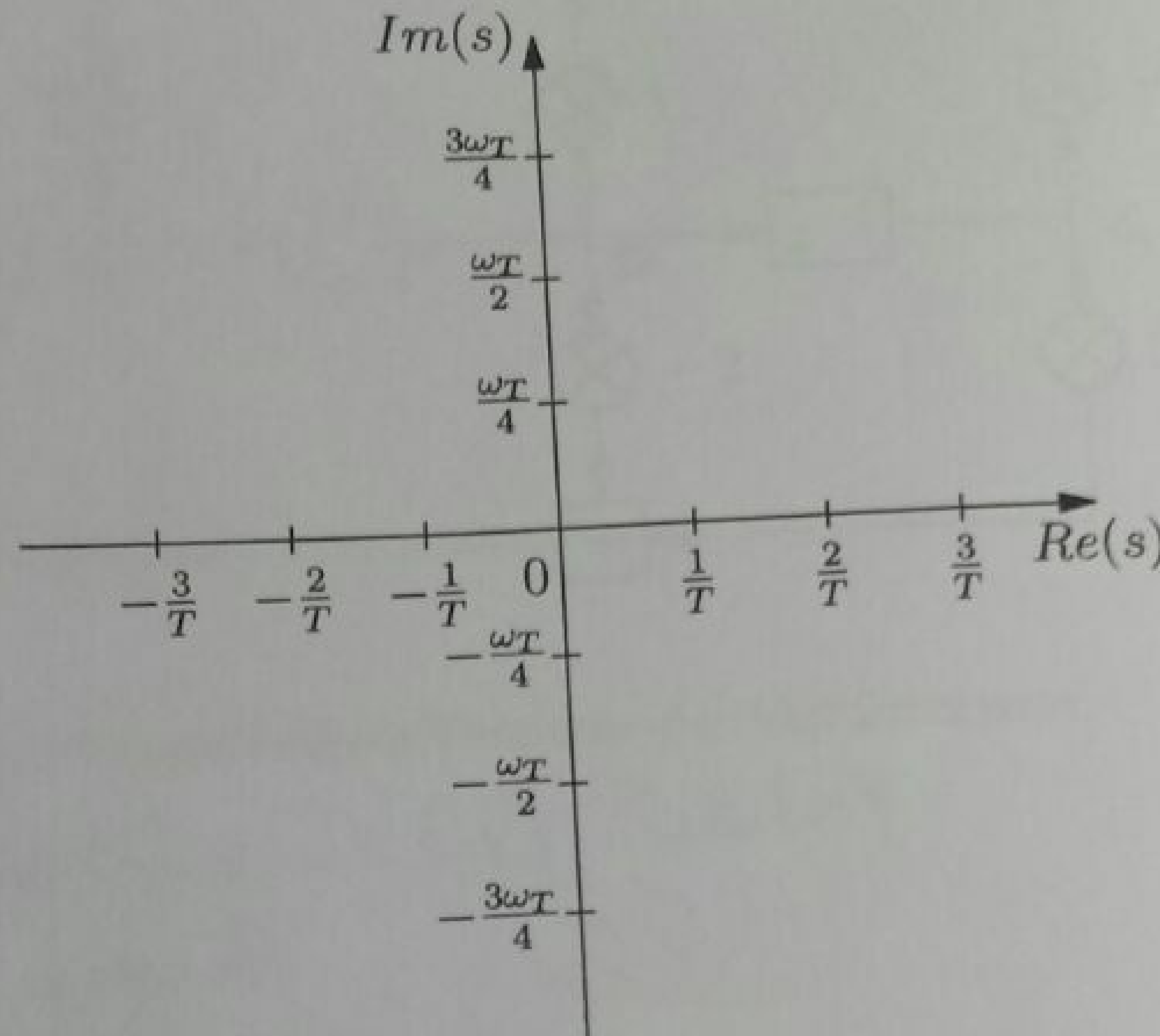
**b)** Skizzieren Sie den Amplitudengang des Systems. Achten Sie auf die Achsenbeschriftung. — 1 P

symmetrisch zur y-Achse
x nicht konst.




Abstandsgleichung

c) Skizzieren Sie weiterhin im untenstehenden Koordinatensystem die PN-Verteilung des entsprechenden zeitkontinuierlichen Systems vor der Abtastung. 1,5 P




?

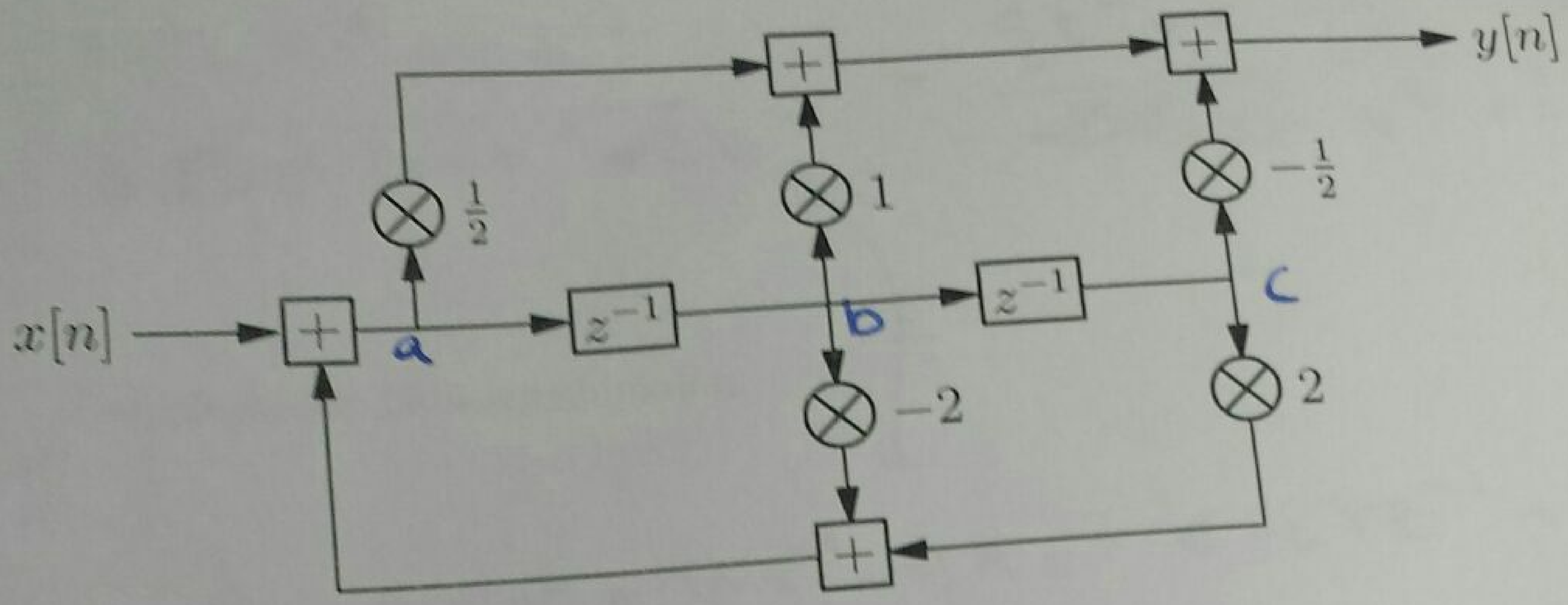
$z_{01} = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$

3. NST $Re(s) \to -\infty$ $Im(s)$ beliebig

$\pm \frac{3\omega_T}{8} = \pm 0{,}375\omega_T$

$\frac{\omega_T}{8} = \pm 0{,}125\, \omega_T$

**3.2** Gegeben sei das folgende zeitdiskrete Filter. **6 P**




a) Bestimmen Sie die ersten sechs Elemente der Impulsantwort. **1,5 P**

$a(n) = x(n) + 2c(n) - 2b(n)$

$b(n) = a(n-1)$

$c(n) = b(n-1)$

$y(n) = \frac{1}{2}a + b - \frac{1}{2}c$

| a(n) | b(n) | c(n) | h(n) | h(n) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| -2 | 1 | 0 | ±0 | 0 |
| 6 | -2 | 1 | $\frac{9}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| -16 | 6 | -2 | -13 | -1 |
| 44 | -16 | 6 | 34 | 3 |
| -120 | 44 | -16 | -92 | 8 |

-32
-84

b) Bestimmen Sie die Differenzengleichung. Verwenden Sie **keine** Hilfssignale. 0,5 P

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z^0 + z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + 2z^{-1} - 2z^{-2}} = \frac{\frac{1}{2}z^2 + z - \frac{1}{2}}{z^2 + 2z - 2} \checkmark$$

c) Berechnen Sie die Systemfunktion. 1,5 P

$$Y(z) = \frac{1}{2}X z^0 + 1 X z^{-1} - \frac{1}{2} X z^{-2} - 2 Y z^{-1} + 2 Y z^{-2}$$

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) + x(n-1) - \frac{1}{2}x(n-2) - 2y(n-1) + 2y(n-2) \checkmark$$

d) Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen der Systemfunktion. 1 P

NSt.: $z^2 + 2z - 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow -1 \pm \sqrt{1+1} = z_{0,1,2}$

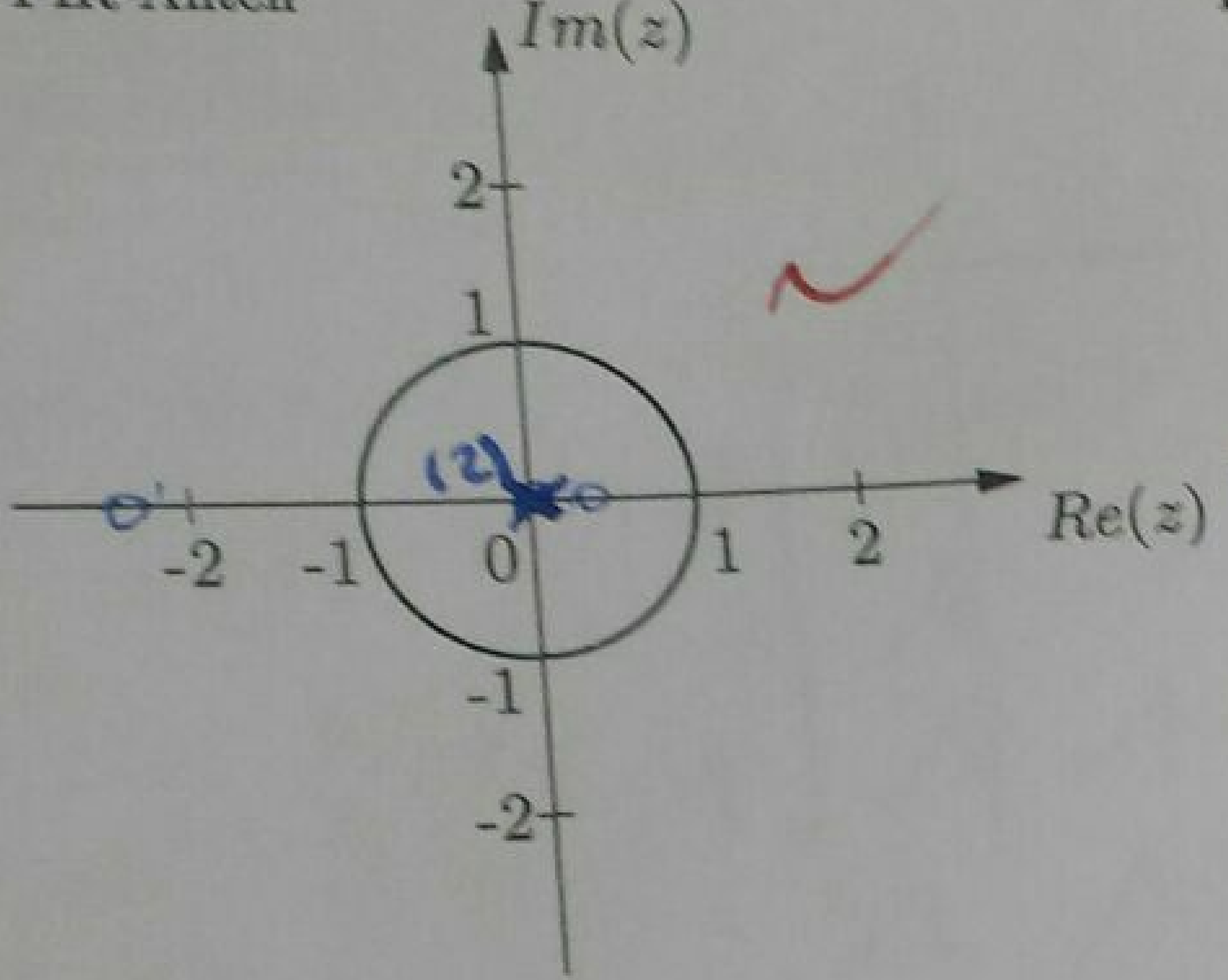
$\Rightarrow z_{01} = -1 + \sqrt{2}$

$\Rightarrow z_{02} = -1 - \sqrt{2} \checkmark$

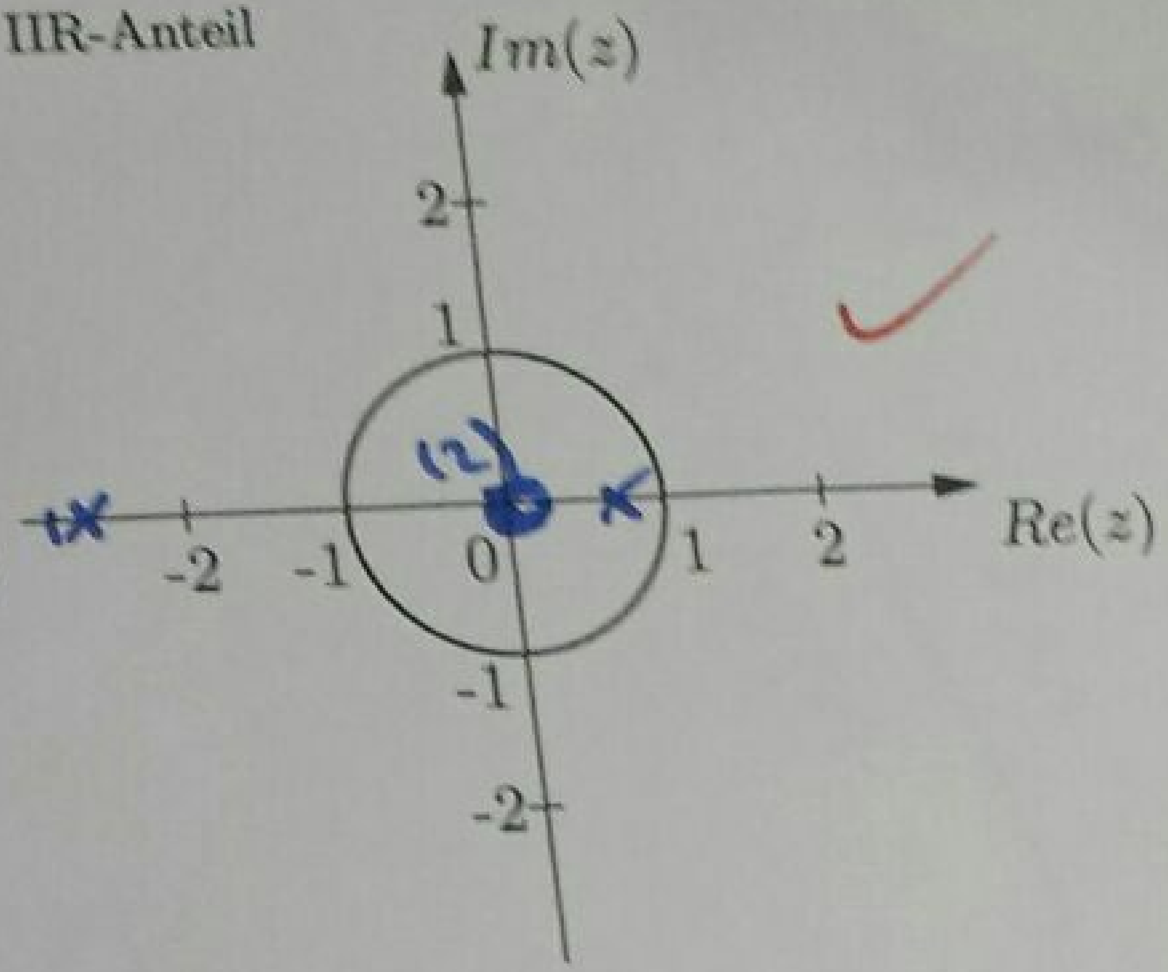
$\sqrt{1+2} = z_{x,1,2}$

e) Zeichnen Sie ein PN-Diagramm jeweils für den FIR- und den IIR-Anteil des Filters. 0,5 P

FIR-Anteil



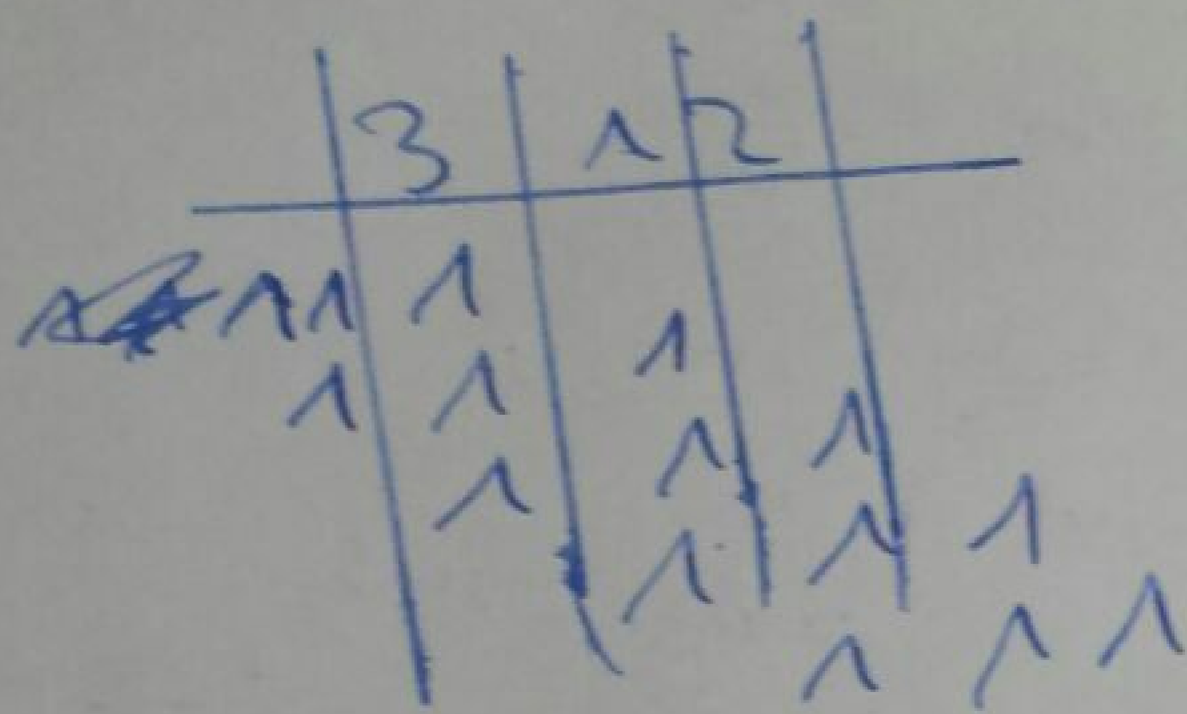

IIR-Anteil




f) Ist das Filter stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P

Nein, da eine Polstelle außerhalb des Kreises sitzt.

**3.3** Ein FIR-Filter habe die Impulsantwort $h(n) = \{3; 1; 2\}$.Bestimmen Sie die Antwort des Filters auf das Eingangssignal $x(n) = \{1; 1; 1\}$ mittels zeitdiskreter Faltung. 2 P



| n | x(n) * h(n) |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 1 | 4 |
| 2 | 6 |
| 3 | 3 |
| 4 | 2 |

**3.4** Beweisen Sie allgemein den Zusammenhang $r_{uv}(k) = u(-n) * v(n)|_{n=k}$. 1* P

$$u(-k) * v(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(-n)v(k-n)$$

Substitution $-n = m$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)v(k+m) \quad r_{uv}(k)$$