Klausur Signale und Systeme
20. März 2007

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hinweise:

- Die Lösungen bitte jeweils auf den freien Platz unterhalb der Aufgabe schreiben. Benutzen Sie ggf. auch die freien Rückseiten der Aufgabenblätter, *jedoch kein anderes Papier!*
- Der Lösungsweg muss bei jeder Aufgabe erkennbar sein!
- Hilfsmittel:
  - nicht programmierbarer Taschenrechner
  - handschriftliche Formelsammlung (ein A4 Blatt, einseitig)
- Verwenden Sie bitte keinen Bleistift und keinen roten oder grünen Stift.
- Bei einem Täuschungsversuch wird die Klausur mit 5,0 bewertet.

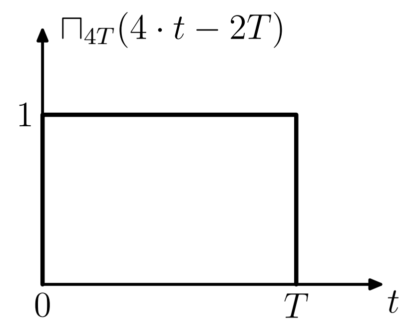
1. Aufgabe (10 Punkte): Signale im Zeit- und Frequenzbereich

1.1. Zeittransformation (2 Punkte)

a) Skizzieren Sie die Funktion $u_1(t) = \sqcap_{4T}(4 \cdot t - 2T)$. Achten Sie dabei auf eine vollständige Beschriftung. (1 Punkt)

Lösung:

Breite des Rechtecks: 0,5 Punkte, Lage und Amplitude: 0,5 Punkte.



b) Gegeben sei die Vorzeichenfunktion

$$sgn(t) = \begin{cases} -1 & : \quad x < 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \\ 1 & : \quad x > 0 \end{cases} .$$

Stellen Sie $u_2(t) = \sqcap_{2T}(t)$ als additive Überlagerung von verschobenen und gewichteten Vorzeichenfunktionen dar! (1 Punkt)

Lösung:

$$u_2(t) = \frac{1}{2} \cdot \big(sgn(t+T) - sgn(t-T)\big)$$

Vorfaktor UND Verschiebung um $\pm T$: 0,5 Punkte, Reihenfolge der $sgn()$-Terme: 0,5 Punkte.

1.2. Periodische Signale und Faltung (2.5 Punkte)

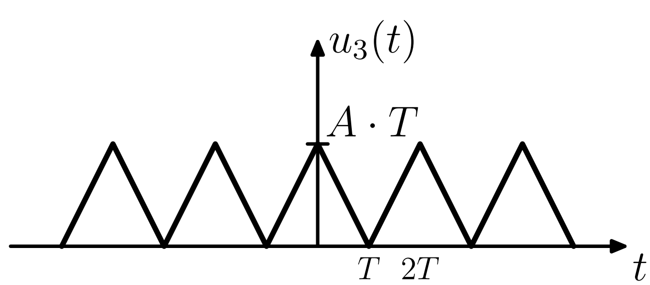
Gegeben ist die zeitkontinuierliche Funktion $u_3(t)$:

$$u_3(t) = A \cdot \sqcap_T(t) * (\sqcap_T(t) * \delta_{2T}(t))$$

Skizzieren Sie $u_3(t)$. Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung. (2,5 Punkte)

Lösung:

Jeweils 0,5 Punkte für: Form=Dreieck,Periodendauer=2T,Breite des Dreiecks, Phasenlage Dreieck, Amplitude).



1.3. Fouriertransformation (1.5 Punkte)

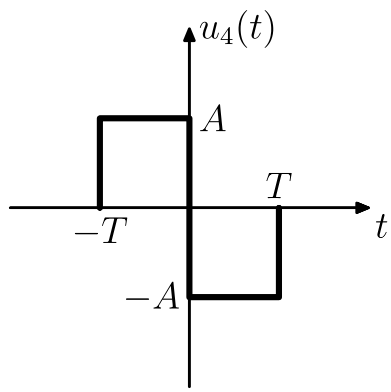
Bestimmen Sie die Fouriertransformierte des Signals $u_3(t)$. (1,5 Punkte)

Lösung:

$$U_3(j\omega) = \underbrace{A \cdot T \cdot \pi}_{0{,}5\,P} \cdot \underbrace{si^2\left(\omega \cdot \frac{T}{2}\right)}_{0{,}5\,P} \cdot \underbrace{\delta_{\frac{\pi}{T}}(\omega)}_{0{,}5\,P}$$

1.4. Autokorrelation (4 Punkte)

Das Signal $u_4(t)$ ist in folgender Skizze dargestellt:



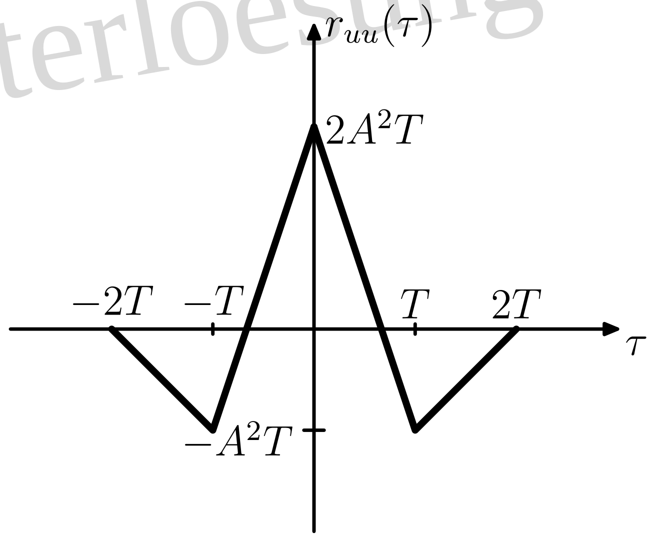
Bestimmen Sie den *Maximalwert* der Autokorrelation $\max(\, r_{uu}(\lambda)\,)$. (1 Punkt)

Lösung:

$$r_{uu}(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u_4(t)^2 \, dt$$
$$r_{uu}(\tau = 0) = \int_{-T}^{T} A^2 \, dt = 2 \cdot A^2 \cdot T$$

Berechnen und skizzieren Sie $r_{uu}(\lambda)$. Achten Sie auch hier auf die vollständige Beschriftung. (3 Punkte)

Lösung:



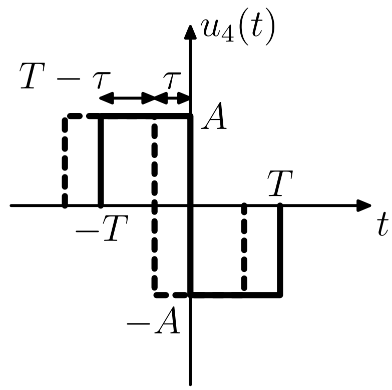
0,5 Punkte für die Symmetrie und Phasenlage, 0,5 Punkte für die Breite und Höhe, 0,5 Punkte für die Form.

Berechnung:

Symmetrie: $r_{uu}(\tau) = r_{uu}(-\tau)$ *(0,5 Punkte)*

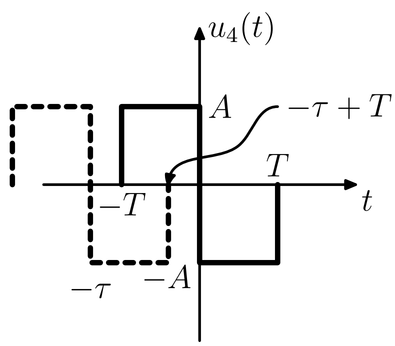
$\tau \in [0, T]$: *graphische Integration liefert (s. Bild unten)*

$$r_{uu}(\tau) = 2 \cdot A^2 \cdot \big((T-\tau) - A^2 \cdot \tau\big)$$
$$= A^2 \cdot (2T - 3\tau) \text{ (0,5 Punkte)}$$



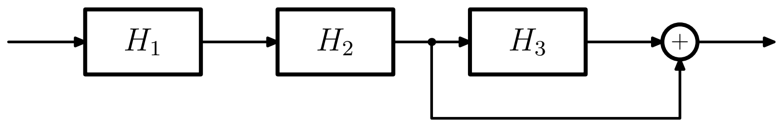
$\tau \in [T, 2T]$: *graphische Integration liefert (s. Bild unten)*

$$r_{uu}(\tau) = -A^2 \cdot \big(\underbrace{\text{Breite des Überlappungsbereichs}}_{=-\tau+T-(-T)}\big)$$
$$r_{uu}(\tau) = -A^2 \cdot (2T - \tau) \text{ (0,5 Punkte)}$$



2. Aufgabe (10 Punkte): Zeitkontinuierliche Signale und Systeme

Die drei zeitkontinuierlichen LTI-Systeme H_1, H_2 und H_3 werden wie dargestellt zum System H_{ges} verschaltet



2.1. Übertragungsfunktion (2 Punkte)

Geben Sie $H_{ges.}(s)$ als Funktion von $H_{1...3}(s)$ an! (0.5 Punkte)

Lösung:

$$\begin{aligned} H_{ges.}(s) &= H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_3(s) + H_1(s) \cdot H_2(s) \\ &= H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot \big(1 + H_3(s)\big) \quad \textit{(0,5 Punkte)} \end{aligned}$$

Vom System H_2 ist die Übertragungsfunktion gegeben, vom System H_3 die Impulsantwort:

$$\begin{aligned} H_2(s) &= \frac{s-1}{(s-1+3j)(s-1-3j)} \\ h_3(t) &= 5 \cdot \sigma(t) \cdot e^{-t} \end{aligned}$$

Geben Sie die konkrete Gesamtübetragungsfunktion $H_{ges}(s)$ in Abhängigkeit von $H_{1...3}(s)$ in Pol/Nullstellenform an. $H_1(s)$ soll dabei ausgeklammert werden. Sollten Sie $H_3(s)$ nicht bestimmen können setzen Sie zum weiterrechnen $H_3(s) = \frac{1}{s+1}$ an. (1 Punkt)

Lösung:

$$\begin{aligned} H_3(s) &= \frac{5}{s+1} \quad \textit{(0,5 Punkte)} \\ H_{ges.}(s) &= H_1(s) \cdot \frac{s-1}{(s-(1-3j)) \cdot (s-(1+3j))} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{5}{s+1}\right)}_{=\frac{s+1}{s+1}+\frac{5}{s+1}} \\ &= H_1(s) \cdot \left(\frac{s-1}{(s-(1-3j)) \cdot (s-(1+3j))} \cdot \frac{s+6}{(s+1)} \right) \\ &= H_1(s) \cdot \left(\frac{(s-1) \cdot (s+6)}{(s+1) \cdot (s-(1-3j)) \cdot (s-(1+3j))} \right) \quad \textit{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

2.2. Stabilität (2 Punkte)

Das System H_1 soll nun so bestimmt werden, dass das Gesamtsystem H_{ges} stabil ist. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H_1(s)$ so, das es ein Allpaß ist und zudem $|H_1\,(s=3)| \overset{!}{=} 1$ gilt.

Lösung:

Das System hat ohne $H_1(s)$ Nullstellen bei $s_{0_0} = 1$ und $s_{0_1} = -6$ sowie Polstellen bei $s_{x_0} = -1$ und $s_{x_{1/2}} = 1 \pm 3j$. Letztere liegen in der positiven Hälfte der s-Domäne und verhindern ein stabiles System. Somit muß $H_1(s)$ zur Kompensation Nullstellen bei $s_{0_{0/1}} = 1 \pm 3j$ aufweisen. Da es zudem ein Allpaß sein soll müssen diese Nullstellen um jeweils eine Polstelle ergänzt werden, deren Position der an der $j\omega$-Achse gespiegelten Nullstelle entspricht, d.h. $s_{x_{0/1}} = -1 \pm 3j$. Damit ergibt sich

$$H_1(s) = \frac{(s-1-3j)\cdot(s-1+3j)}{(s+1-3j)\cdot(s+1+3j)} \text{ (1 Punkt}$$

Setzt man $s = 3$ ein so erhält man

$$|H_1(s=3)| = \left|\frac{(2-3j)\cdot(2+3j)}{(4-3j)\cdot(4+3j)}\right|$$

$$|H_1(s=3)| = \left|\frac{(4+9)}{(16+9)}\right| = \frac{13}{25}$$

Der Betrag kann durch einen Vorfaktor von $\frac{25}{13}$ wie gefordert normiert werden. Somit ergibt sich letztendlich

$$H_1(s) = \frac{25}{13}\cdot\frac{(s-1-3j)\cdot(s-1+3j)}{(s+1-3j)\cdot(s+1+3j)} \text{ (1 Punkt}$$

2.3. Laplace-Transformation (1 Punkt)

Leiten Sie die rechtsseitige Laplace-Transformatierte von $u_5(t) = A\cdot\sigma(t)\cdot\cos(\omega_0 t)$ her! Hinweis: $\cos(\omega_0 t) \widehat{=} \frac{1}{2}\cdot\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$.

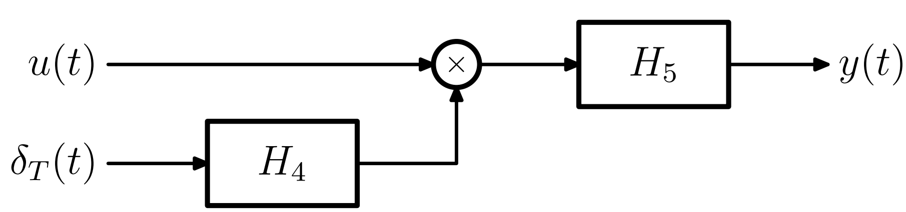
Lösung:

Mit der Linearität der Laplace-Transformation, dem Modulationssatz $\mathfrak{L}\left\{e^{-at}\cdot f(t)\right\} = F(s+a)$ und dem Transformationspaar $\mathfrak{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\left\{\frac{A}{2}\cdot\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)\right\} &= \frac{A}{2}\cdot\left(\mathfrak{L}\left\{1\cdot e^{j\omega_0 t}\right\} + \mathfrak{L}\left\{1\cdot e^{-j\omega_0 t}\right\}\right) \\
&= \frac{A}{2}\cdot\left(\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0}\right) \\
&= \frac{\frac{A}{2}\cdot(s+j\omega_0 t + s - j\omega_0 t)}{s^2+\omega_0^2} \\
&= A\cdot\frac{s}{s^2+\omega_0^2}
\end{aligned}$$

2.4. Abtastung (5 Punkte)

Ein zeitkontinuierliches Signal $u(t)$ wird, wie im Blockschaltbild dargestellt, mit der Abtastdauer T nichtideal abgetastet.



b) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein damit das Gesamtsystem *kausal* ist? Bitte begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

Lösung:

Das System ist kausal wenn $H_5(j\omega)$ kausal ist. Die Multiplikation mit einem beliebigen Signal ändert nichts an der Kausalität des resultierenden Signals.

c) Welche Bedingungen müssen an T und $H_5(j\omega)$ gestellt werden damit eine fehlerfreie Rekonstruktion von $u(t)$ möglich ist? Die maximale Frequenz von $u(t)$ sei B_Q. Begründen Sie Ihre Antwort! (Ggf. erst Punkt d) lösen!) (1 Punkt)

Lösung:

1. *Abtasttheorem:* $f_T = \frac{1}{T} \geq 2 \cdot B_Q$ *(0,5 Punkte)*
2. *Bandbreite von* $H_5(j\omega) \geq B_Q$. *(0,5 Punkte)*

d) Bestimmen Sie allgemein das Spektrum $Y(j\omega)$ des Ausgangssignals in Abhängigkeit des Spektrums des Eingangssignals $U(j\omega)$. Geben Sie das Ergebnis in Summenschreibweise an. (2 Punkte)

Lösung:

$$\begin{aligned} y(t) &= h_5(t) * \big(u(t) \cdot (\delta_T(t) * h_4(t))\big) \\ \Rightarrow Y(j\omega) &= H_5(j\omega) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \cdot U(j\omega) * \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \delta_{\frac{2\pi}{T}} \cdot H_4(j\omega)\right)\right) \\ &= H_5(j\omega) \cdot \left(\frac{1}{T} \cdot U(j\omega) * \left(\delta_{\frac{2\pi}{T}}(\omega) \cdot H_4(j\omega)\right)\right) \\ &= H_5(j\omega) \cdot \left(\frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} U\big(j(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{T})\big) \cdot H_4\big(j\left(k \cdot \frac{2\pi}{T}\right)\big)\right) \end{aligned}$$

Jeweils einen halben Punkt für die spektrale Wiederholung von $U(j\omega)$, ω_T-Perjodizität der spektralen Wiederholungen, Gewichtung der spektralen Wiederholungen mit $H_4\big(j\left(k \cdot \frac{2\pi}{T}\right)\big)$, Multiplikation mit $\frac{H_5(j\omega)}{T}$.

e)Es sei $h_4(t) = \sqcap_{\frac{T}{2}}(t)$. Bestimmen Sie $Y(j\omega)$ $H_5(j\omega)$ so, dass $y(t) = u(t)$ gilt! Es gelten die Bedingungen von Punkt c). (1 Punkt)

Lösung:

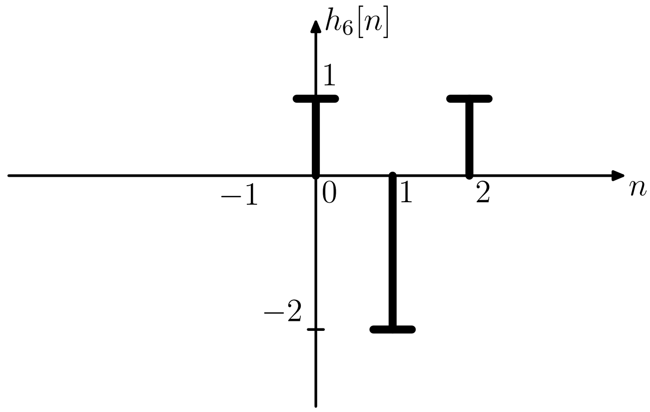
$$\begin{aligned} H_4(j\omega) &= \frac{T}{2} \cdot si\left(\omega \cdot \frac{T}{4}\right) \\ Y(j\omega) &= \frac{1}{2} \cdot H_5(j\omega) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} U\big(j(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{T})\big) \cdot si\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot H_5(j\omega) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} U\big(j(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{T})\big) \cdot si\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right) \text{ (0,5 Punkte)} \end{aligned}$$

Ausschneiden der 0. spektralen Wiederholung durch ein Tiefpaß und Verstärkung um den Faktor 2 $\Rightarrow$ $H_5(j\omega) = 2 \cdot \sqcap_{\frac{\pi}{T}}(\omega)$ (0,5 Punkte).

3. Aufgabe (10 Punkte): Zeitdiskrete Signale und Systeme

3.1. z-Transformationen (4 Punkte)

Gegeben sei die Impulsantwort $h_6[n]$ eines zeitdiskreten Filters:

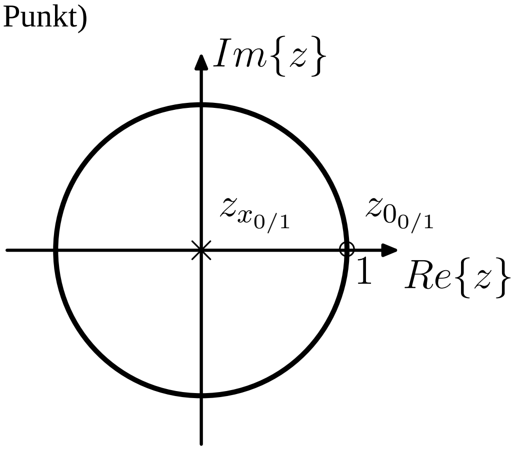


a) Berechnen Sie die z-Transformierte $H_6(z)$! (0.5 Punkte)

Lösung:

$$H_6(z) = 1 - 2 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2}$$

b) Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen des Filters und tragen Sie diese in der z-Ebene ein! (1 Punkt)



Lösung:

$$H_6(z) = \frac{z^2 - 2 \cdot z + 1}{z^2}$$

p/q-Formel für quadratische Gleichungen $x^2 + px + q = 0$

$$x_{0/1} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$\Rightarrow z_{0/1} = 1 \pm \sqrt{1 - 1}$$

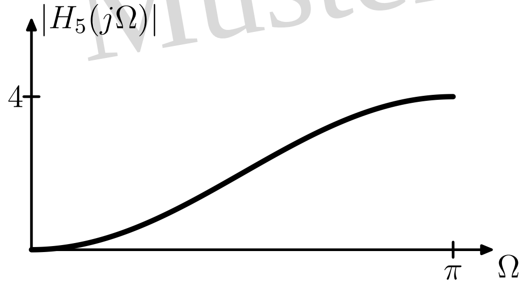
Doppelnullstelle bei $z_{0/1} = 1$ *(0,5 Punkte), doppelte Polstelle im Ursprung (0,5 Punkte).*

c) Ist das Filter minimalphasig? Begründen Sie ihre Antwort! (0.5 Punkte)

Lösung:

Ja, System ist allpaßfrei.

e) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $H_5(j\Omega)$ und zeichnen Sie den Betragsfrequenzgang in das folgende Diagramm ein! Begründen Sie die Existenz der Fouriertransformierten! (2 Punkte)



Lösung:

Ausnutzung der Symmetrie:

$$H_6(z) = z^{-1} \cdot \left(z + z^{-1} - 2\right)$$

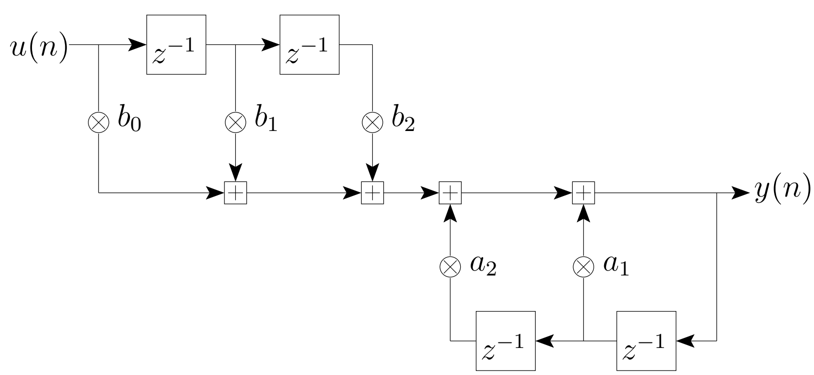
Substitution: $z = e^{j\Omega}$

$$\begin{aligned} H_6(j\Omega) &= e^{-j\Omega} \cdot \left(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega} - 2\right) \\ &= e^{-j\Omega} \cdot 2 \cdot (\cos(\Omega) - 1) \\ |H_6(j\Omega)| &= 2 \cdot |\cos(\Omega) - 1| \end{aligned}$$

Jeweils einen halben Punkt für: Vorfaktor, Tiefpaßverlauf, Cosinus, Skizze richtig beschriftet UND Begründung.

3.2. Zeitdiskrete Systeme (4 Punkte)

Gegeben ist das folgende zeitdiskrete lineare System H_6.



a) Es seien die Filterkoeffizienten $a_1 = 1$ und $a_2 = -0,25$ gegeben. Bestimmen Sie b_0, b_1 und b_2 so, daß H_6 Allpassverhalten aufweist. (4 Punkte)

Lösung:

IIR-Filter: $H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}+\frac{1}{4}\cdot z^{-2}}$ $\Rightarrow$ *Nullstellen von* $z^{-2}\cdot\left(z^2 - 1\cdot z + \frac{1}{4}\right)$.

$$z_{0/1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \Rightarrow \text{Doppelpolstelle bei } z_{0/1} = 0,5$$

Allpaß: Nullstellen müssen spiegelsymmetrisch zum Einheitskreis liegen $\Rightarrow$ *Doppelnullstelle bei* $z_{0/1} = \frac{1}{0,5} = 2$. *Somit gilt für den FIR-Anteil:* $H(z) = \frac{(z-2)(z-2)}{z^2} = \frac{z^2-4\cdot z+4}{z^2} = 1 - 4\cdot z^{-1} + 4\cdot z^{-2}$ *und man erhält die Filterkoeffizienten zu* $a_0 = 1$, $a_1 = -4$ *und* $a_2 = 4$. *0,5 Punkte für die richtige Beschreibung eines Allpasses im* z*-Bereich, jeweils 0,5 Punkte für jede korrekte Nullstelle ODER einen halben Punkt für den richtigen Ansatz.*

b) Es gelte $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_0 = 1$, $b_1 = 2$ und $b_2 = -1$. Bestimmen Sie die ersten beiden Koeffizienten einer DFT $(N = 4)$ der Impulsantwort! (2 Punkte)

Lösung:

Auf 4 Punkte erweiterte Impulsantwort: $h[k] = \{1, 2, -1, 0\}$.

$$H_{DFT}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]\cdot e^{-jkn\frac{2\pi}{N}} \text{ Nur das: 0.5 Punkte}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow H_{DFT}[0] &= \sum_{k=0}^{3} h[k]\cdot e^{-jk\cdot 0\cdot\frac{2\pi}{N}}\\
&= \sum_{k=0}^{3} h[k]\\
&= 2 \text{ (1 Punkt)}\\
H_{DFT}[1] &= \sum_{k=0}^{3} h[k]\cdot e^{-jk\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{N}}\\
&= 1 + 2\cdot e^{-j\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}} - 1\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2}}\\
&= 1 + 2\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - 1\cdot(\cos(-\pi) + j\cdot\sin(-\pi))\\
&= 1 + 2\cdot(0 - j) - 1\cdot(-1 + 0j)\\
&= 2 - 2\cdot j \text{ (1 Punkt)}
\end{aligned}$$

3.3. FIR-Filter (2 Punkte)

Bei der Aufnahme von Tonsignalen mittels einer Soundkarte (Abtastrate $8\ \mathrm{kHz}$, 16 Bit/Abtastwert) fällt ein störendes $50\ \mathrm{Hz}$-Brummen auf. Entwerfen Sie ein FIR-Filter mit möglichst kurzer Verzögerung, welches dieses Brummen ausblendet (Notch-Filter). Geben Sie die Filterkoeffizienten und die Durchlaufverzögerung an!

Lösung:

FIR-Filter mit 2 Nullstellen auf dem Einheitskreis bei $z_{0/1} = e^{\pm j\Omega_0}$*, wobei sich* Ω_0 *aus der Verhältnisgleichung*

$$\frac{\Omega_0}{f_0} = \frac{2\pi}{f_T}$$

zu $\Omega_0 = 2\pi \cdot \frac{50\ \mathrm{Hz}}{8\ \mathrm{kHz}}$ *ergibt. Das FIR-Filter hat somit folgende z-Transformierte:*

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(z - z_0)\cdot(z - \underline{z}_0)}{z^2} \\ &= \frac{z^2 - z\cdot(z_0 + \underline{z}_0) + z_0\cdot\underline{z}_0}{z^2} \\ &= \frac{z^2 - z\cdot 2\cdot \underbrace{Re\{z_0\}}_{\cos(\Omega_0)} + \underbrace{|z_0|^2}_{=1}}{z^2} \\ &= 1 - 2\cdot\cos\left(2\pi\cdot\frac{50\ \mathrm{Hz}}{8\ \mathrm{kHz}}\right)\cdot z^{-1} + 1\cdot z^{-2} \end{aligned}$$

Es ist also ein FIR-Filter mit den Koeffizienten $a_0 = 1$, $a_1 = -1,9985$ *und* $a_2 = 1$ *(für jeden 0.5 Punkte). Da das Signal über zwei „Speicher“ verzögert wird (*z^{-2}*!) beträgt die Signalverzögerung* $2\cdot T = \frac{2}{f_T} = 0,25\ \mathrm{ms}$ *(0.5 Punkte).*