Prof. Dr. Radosveta Ivanova-Stenzel
Dr. Vera Angelova

SPIELTHEORIE

KLAUSUR WS 2014/15

26. März 2015

Name:

Studienfach:

Abschluss:

Matrikelnummer:

Unterschrift:

Lösen Sie **alle 3** Aufgaben!

Sie haben **90** Minuten Zeit.

Erlaubtes (aber nicht notwendiges) Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer Taschenrechner.

VIEL ERFOLG!

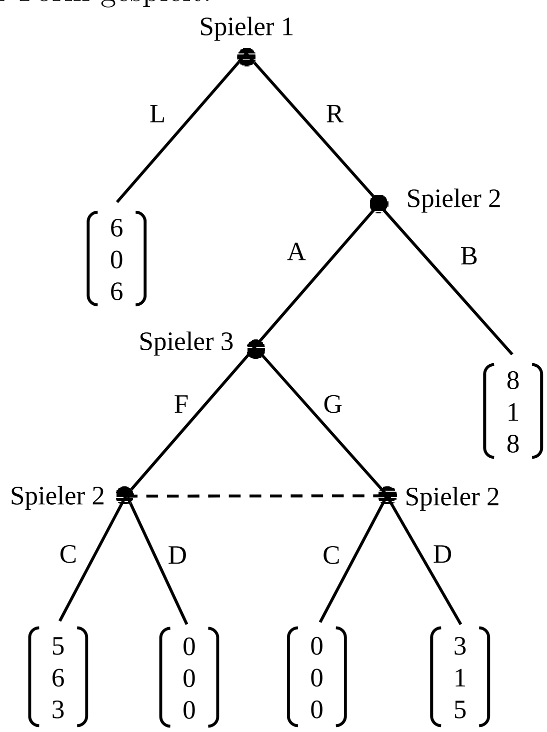
Aufgabe 1 (*36 Punkte*)

Teil I. Angenommen Spieler 1 und Spieler 2 spielen das folgende Spiel:

		Spieler 2: V	Spieler 2: W
Spieler 1	X	4, 4	4, 6
	Y	4, 0	2, 2
	Z	6, 2	4, 0

Bestimmen Sie **alle** Nash-Gleichgewichte (in reinen und gemischten Strategien).

Teil II. Angenommen, es gibt einen weiteren Spieler 3. Nun wird das folgende Spiel in extensiver Form gespielt.



In jedem Auszahlungsvektor bezeichnet die erste Zahl die Auszahlung für Spieler 1, die zweite Zahl die Auszahlung für Spieler 2 und die dritte Zahl die Auszahlung für Spieler 3.

a) Wie viele Teilspiele gibt es in diesem Spiel? Geben Sie den Entscheidungsknoten an, an dem jedes Teilspiel anfängt. (Hinweis: Das ganze Spiel wird nicht als Teilspiel gezählt.)

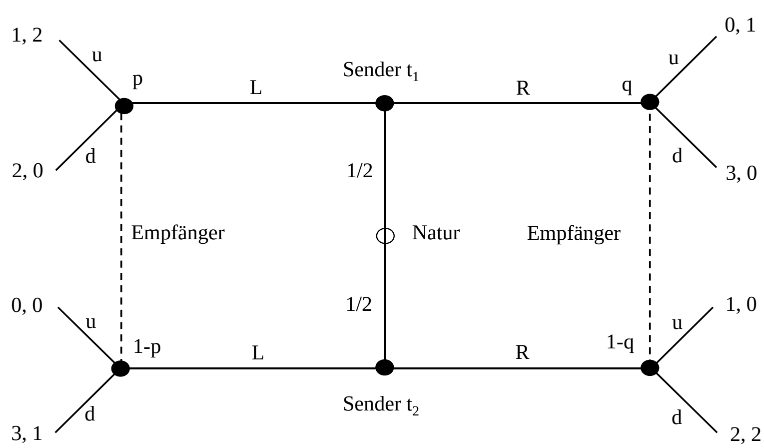
b) Aus wie vielen Komponenten besteht die Strategie vom Spieler 1, Spieler 2, Spieler 3?

c) Bestimmen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte in reinen Strategien in diesem Spiel.

d) Welche Strategie wird Spieler 1 im teilspielperfekten Gleichgewicht wählen, bei dem im Teilspiel nach "R" und "A" Spieler 2 "C" mit Wahrscheinlichkeit 5/8 (bzw. "D" mit Wahrscheinlichkeit 3/8) und Spieler 3 "F" mit Wahrscheinlichkeit 1/7 (bzw. "G" mit Wahrscheinlichkeit 6/7) wählt? Begründen Sie.

Aufgabe 2 (*21 Punkte*)

a) Geben Sie alle *pooling* perfekten Bayesianischen Gleichgewichte in reinen Strategien an, bei denen beide Typen des Senders im folgenden Signalisierspiel die Nachricht R wählen.



b) Gibt es ein perfektes Bayesianisches Gleichgewicht, bei dem der Sender die Strategie (R, L) spielt? Begründen Sie.

c) Angenommen beide Sender-Typen können eine weitere Nachricht M senden. Wie viele Komponenten hat die Strategie des Empfängers?

Aufgabe 3 (*33 Punkte*)

Zwei Fischer müssen gleichzeitig entscheiden, wie viele Stunden sie im selben See fischen wollen. Wenn Fischer 1 $x_1 \geq 0$ Stunden und Fischer 2 $x_2 \geq 0$ Stunden fischt, dann ist der Gesamtfang gegeben durch $a(x_1+x_2)-(x_1+x_2)^2$. Davon bekommt jeder Fischer $\frac{x_i}{x_1+x_2}$. Beide Fischer haben dieselben Kosten pro Stunde: $w > 0$. Angenommen, der Fischpreis pro Einheit ist 1. Folglich ist die Auszahlungsfunktion des Fischers i:

$$u_i(x_1, x_2) = \frac{x_i}{x_1 + x_2}(a(x_1 + x_2) - (x_1 + x_2)^2) - wx_i = x_i(a - (x_1 + x_2) - w).$$

a) Wie viele Stunden fischt jeder Fischer im Nash-Gleichgewicht? (Bestimmen Sie die innere Lösung.)

b) Das Spiel wird nun unendlich oft wiederholt. Angenommen die Gesamtanzahl an Stunden im sozialen Optimum ist $X^o = \frac{a-w}{2}$.

   Betrachten Sie die folgende "grim-trigger"–Strategie: *"Fische $\frac{X^o}{2}$ Stunden in der ersten Periode und in der Periode t, wenn beide Fischer in allen $t-1$ vorhergehenden Perioden jeweils $\frac{X^o}{2}$ Stunden gefischt haben. Ansonsten fische $\frac{a-w}{3}$ Stunden."* Für welche Werte vom Diskontfaktor δ ($0 < \delta < 1$) ist das Strategienpaar, bei dem jeder Fischer die "grim-trigger"–Strategie spielt, ein Nash-Gleichgewicht des unendlich oft wiederholten Spiels? (Hinweis: $1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + ... = \frac{1}{1-\delta}$).

c) Nehmen Sie nun an, dass die Kosten von Fischer 2 entweder hoch, d.h. w_H, oder niedrig, d.h., w_L, sind ($0 < w_L < w_H$). Die Kosten von Fischer 1 bleiben unverändert, d.h. sie sind w. Fischer 2 kennt seine eigenen Kosten und die Kosten von Fischer 1. Fischer 1 kennt seine eigenen Kosten, weiß aber nur, dass die Kosten von Fischer 2 mit je 50% Wahrscheinlichkeit w_L oder w_H sind. Dies ist beiden Spielern bekannt. Geben Sie die (erwarteten) Auszahlungsfunktionen der beiden Fischer in diesem Fall an.

Lösungen Klausur Spieltheorie vom 26. März 2015

Prof. Dr. Radosveta Ivanova-Stenzel
Dr. Vera Angelova

1. Aufgabe: *(36 Punkte)*

TEIL I:

Y wird von Z strikt dominiert. Also Y eliminieren.

		Spieler 2	
		V (q)	W $(1-q)$
Spieler 1	X (r)	4, 4	$\underline{4}$, $\underline{6}$
	Z $(1-r)$	$\underline{6}$, $\underline{2}$	$\underline{4}$, 0

GG in reinen Strategien: (Z, V), (X, W)

GG, wo einer rein spielt und der andere mischt:

Spieler 1 ist indifferent, wenn Spieler 2 W spielt. W ist eine beste Antwort, wenn:

$$E_2(W) \geq E_2(V) \Leftrightarrow 6r \geq 4r + 2(1-r) \Leftrightarrow r \geq \frac{1}{2}$$

GG: $((r^*, 0, 1-r^*), W)$, $r^* \geq \frac{1}{2}$.

GG, wo beide mischen:

$E_2(W) = E_2(V)$ für $r = \frac{1}{2}$.

$$E_1(X) = E_1(Z) \Leftrightarrow 4q + 4(1-q) = 6q + 4(1-q) \Leftrightarrow q = 0$$

Keine GG, wo beide mischen.

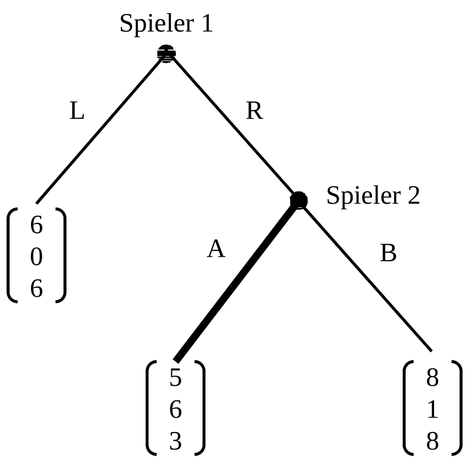
TEIL II:

a) 2 TS: nach R und nach R, A.

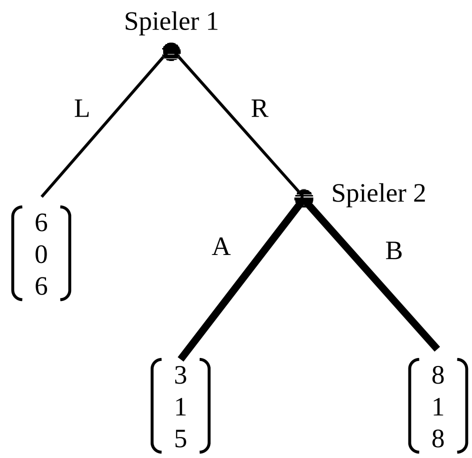
b) Sp.1: eine; Sp.2: zwei; Sp.3: eine.

c) GG im TS nach R und A: (C, F) und (D, G)

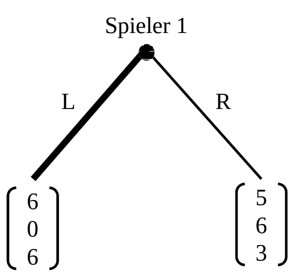
		Spieler 3	
		F	G
Spieler 2	C	$\underline{6}, \underline{3}$	$0, 0$
	D	$0, 0$	$\underline{1}, \underline{5}$



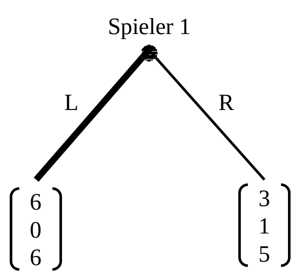
C, F



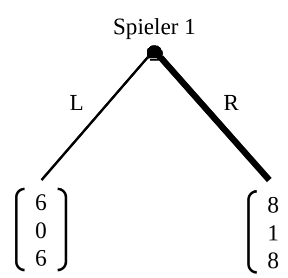
D, G



AC, F



AD, G



BD, G

Teilspielperfekte GG: (L, AC, F), (L, AD, G), (R, BD, G)

d)

$$\pi_2^{TS} = 6 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{7} + 1 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{30}{56} + \frac{18}{56} = \frac{48}{56}$$

Spieler 2 bekommt $\frac{48}{56}$ nach A und 1 nach B. Also spielt er: B. Spieler 1 spielt R, da $8 > 6$.

2. Aufgabe: *(21 Punkte)*

a) Angenommen, Sender spielt (R, R). D.h. $q = \frac{1}{2}$.
Beste Antwort vom Receiver:

$$u : \frac{1}{2} \cdot (1 + 0) = \frac{1}{2}$$

$$d : \frac{1}{2} \cdot (0 + 2) = 1$$

Receiver spielt d.
Auszahlungen vom Sender im GG:
t_1: 3, kein Anreiz abzuweichen
t_2: 2, wird abweichen, wenn Receiver d spielt. Also, nach L muss u gespielt werden:

$$u \geq d \Leftrightarrow 2p + 0(1-p) \geq 0p + 1(1-p) \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{3}$$

PBGG: $((R, R), (u, d), p \geq \frac{1}{3}, q = \frac{1}{2})$.

b) Angenommen, Sender spielt (R, L). D.h. $p = 0$ und $q = 1$.
Beste Antwort vom Receiver: (d, u) (oder u nach R, d nach L). t_1 bekommt im GG 0, und bei der Abweichung davon: 2. Also kein GG hier.

c) Drei Elemente: nach L, nach R, nach M.

3. Aufgabe: *(33 Punkte)*

a) Nash-GG?

$$\max u_1 = x_1(a - x_1 - x_2 - w)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = a - 2x_1 - x_2 - w = 0$$

$$x_1 = \frac{a - x_2 - w}{2}$$

Annahme Symmetrie: $x_1 = x_2 = x$

$$2x = a - x - w \Leftrightarrow x^* = \frac{a - w}{3}$$

b) Annahme: Spieler 2 folgt immer der Strategie. Spieler 1 folgt oder weicht ab.

Spieler 1 folgt der Strategie:

Sp. 2	$\frac{a-w}{4}$	$\frac{a-w}{4}$	$\frac{a-w}{4}$	...
Sp. 1	$\frac{a-w}{4}$	$\frac{a-w}{4}$	$\frac{a-w}{4}$	...
π_1	$\frac{(a-w)^2}{8}$	$\frac{(a-w)^2}{8}$	$\frac{(a-w)^2}{8}$	...

$$u_1(\frac{a-w}{4}, \frac{a-w}{4}) = \frac{a-w}{4}(a - \frac{a-w}{4} - \frac{a-w}{4} - w)) = \frac{a-w}{4} \cdot \frac{a-w}{2} = \frac{(a-w)^2}{8}$$

Also bekommt Spieler 1 in jeder Periode $\frac{(a-w)^2}{8}$. Die durchschnittliche Auszahlung aus Folgen ist $\frac{(a-w)^2}{8}$.

Spieler 1 weicht ab:

Beste Antwort auf $\frac{a-w}{4}$:

$$x_1^{abw} = \frac{a - \frac{a-w}{4} - w}{2} = \frac{\frac{3}{4}(a-w)}{2} = \frac{3}{8}(a-w)$$

$$\pi_1^{abw}(\frac{3}{8}(a-w), \frac{a-w}{4}) = \frac{3}{8}(a-w)(a - \frac{3}{8}(a-w) - \frac{a-w}{4} - w) = \frac{9}{64}(a-w)^2$$

$$\pi_1^C(\frac{a-w}{3}, \frac{a-w}{3}) = \frac{a-w}{3}(a - 2\frac{a-w}{3} - w) = \frac{(a-w)^2}{9}$$

Sp. 2	$\frac{a-w}{4}$	$\frac{a-w}{3}$	$\frac{a-w}{3}$	...
Sp. 1	$\frac{3(a-w)}{8}$	$\frac{a-w}{3}$	$\frac{a-w}{3}$	...
π_1	$\frac{9}{64}(a-w)^2$	$\frac{(a-w)^2}{9}$	$\frac{(a-w)^2}{9}$	...

Nash-GG, falls:

$$\frac{(a-w)^2}{8} \geq (1-\delta)\left(\frac{9}{64}(a-w)^2 + \frac{(a-w)^2}{9} \cdot \frac{\delta}{1-\delta}\right)$$
$$\delta \geq \frac{9}{17}$$

c)

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(x_1(a - x_1 - x_2^H - w\right) + \frac{1}{2}\left(x_1(a - x_1 - x_2^L - w)\right)$$
$$u_2^H = \left(x_2^H(a - x_2^H - x_1 - w_H\right)$$
$$u_2^L = \left(x_2^L(a - x_2^L - x_1 - w_L\right)$$