Prof. Dr. Radosveta Ivanova-Stenzel
Dr. Vincent Meisner

SPIELTHEORIE
KLAUSUR WS 2018/19

19. Februar 2019

Name:

Matrikelnummer:

Studienfach:

Zutreffendes bitte ankreuzen: Bachelor ☐
Master ☐

Unterschrift:

Lösen Sie **alle 3** Aufgaben!

Geben Sie zu Ihren Ergebnissen **immer den Lösungsweg** an. Ergebnisse, deren Ermittlung nicht nachvollzogen werden kann, werden **nicht gewertet!**

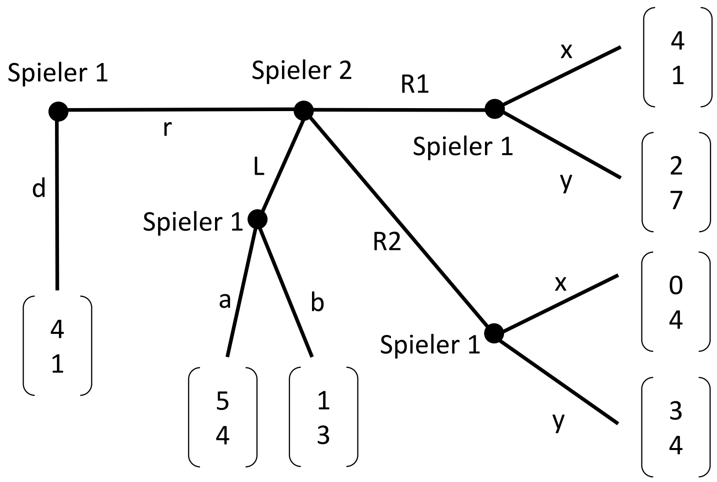
Sie haben **90** Minuten Zeit.

Erlaubtes (aber nicht notwendiges) Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer Taschenrechner.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1 (*37 Punkte*)

Betrachten Sie den folgenden Spielbaum. Die erste Zahl gibt die Auszahlung von Spieler 1 an, die zweite ist die Auszahlung von Spieler 2.



a) Wie viele echte Teilspiele hat dieses Spiel? Markieren Sie die Teilspiele im Spielbaum. (*Hinweis*: Das ganze Spiel wird nicht als echtes Teilspiel gezählt.)

b) Aus wie vielen Aktionen besteht die Strategie vom Spieler 1 bzw. die Strategie vom Spieler 2?
Begründen Sie.

c) Bestimmen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte in reinen Strategien und die dazugehörigen teilspielperfekten Ergebnisse.

Betrachten Sie ab jetzt die folgende Modifikation des Spiels. Nehmen Sie an, dass Spieler 1 bei der Entscheidung x oder y nicht weiß, ob er nach $R1$ oder nach $R2$ spielt. Er weiß aber, ob er nach L spielt oder nicht.

d) Zeichnen Sie die Veränderung durch diesen Informationsunterschied in den Spielbaum ein.

e) Finden Sie alle perfekten Bayesianischen Gleichgewichte in reinen Strategien.

(*Hinweis*: Berechnen Sie zuerst die teilspielperfekten Gleichgewichte in reinen Strategien des modifizierten Spiels.)

Aufgabe 2 (*25 Punkte*)

Zwei Spieler müssen gleichzeitig entscheiden wieviel sie zu einem öffentlichen Gut beitragen wollen. Wenn Spieler 1 den Beitrag x und Spieler 2 den Beitrag y wählt, dann ist der Wert des öffentlichen Guts

$$2(x + y + xy)$$

und jeder Spieler bekommt diesen Wert ausgezahlt. Beide Spieler können jede nichtnegative Zahl als ihren Beitrag wählen. Die Kosten für Spieler 1, wenn er x zum öffentlichen Gut beiträgt, sind x^2. Die Kosten für Spieler 2 vom Typ $t \in \{[t_L, t_H\}$, wenn er y zum öffentlichen Gut beiträgt, sind ty^2. Der Wert von t ist private Information von Spieler 2 und kann entweder $t_L = 1$ oder $t_H = 2$ sein. Spieler 1 weiß nicht, mit welchem Typ von Spieler 2 er es zu tun hat. Er glaubt, dass beide Typen gleich wahrscheinlich sind.

a) Begründen Sie, warum es sich bei diesem Spiel um **kein** Signalisierspiel handelt. Was müsste sich ändern, damit es zu einem wird?

b) Nennen Sie die (erwarteten) Auszahlungen beider Spieler.

c) Besimmen Sie die besten Antworten.

d) Bestimmen Sie das Bayesianische Gleichgewicht.

Aufgabe 3 (*28 Punkte*)

TEIL I:

Betrachten Sie das folgende Spiel:

		Spieler 2	
		L	R
Spieler 1	U	$4, 1$	$2, 0$
	D	$2, 1$	$5, 1$

a) Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte in reinen Strategien.

b) Finden Sie alle weiteren Nash–Gleichgewichte.

TEIL II auf der nächsten Seite.

TEIL II:

Betrachten Sie das folgende Spiel:

		Spieler 2	
		C	D
Spieler 1	C	$2, 4$	$0, 8$
	D	$4, 0$	$1, 2$

c) Gibt es ein Nash-Gleichgewicht in strikt dominanten Strategien? Wenn ja, nennen Sie es. Wenn nein, begründen Sie, warum nicht.

d) Bestimmen Sie den Diskontfaktor $\underline{\delta}$, ab dem das das wechselseitige Spielen der folgenden Grim-Trigger-Strategie ein Nash–Gleichgewicht im unendlich oft wiederholten Spiel ist.

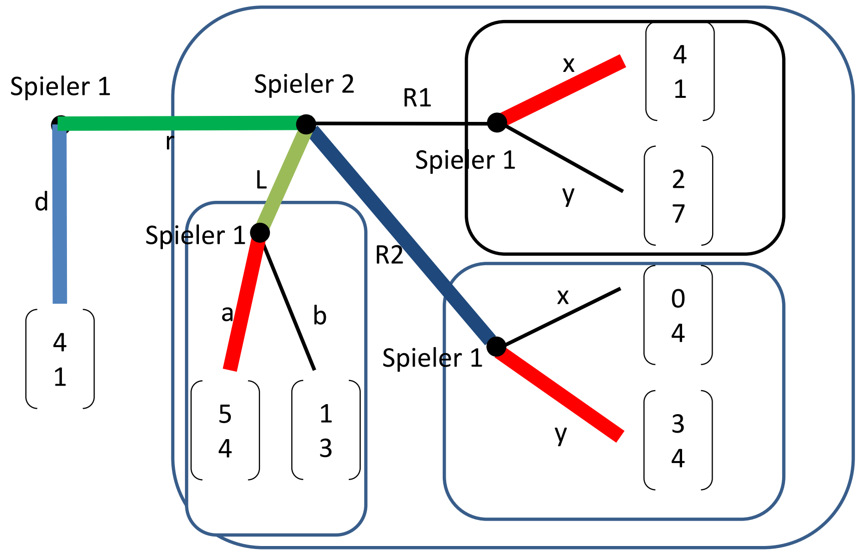
Grim-Trigger: Spiele C in der ersten Runde und wenn alle Spieler in der Vergangenheit immer C gespielt haben. Ansonsten spiele D.

Hinweis: $1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + ... = \frac{1}{1-\delta}$

LÖSUNG

Aufgabe 1

a) Vier TS **(3 P)**



b) Vier Aktionen für Spieler 1, eine Aktion für Spieler 2. **(3 P)**
Notation ((erster Zug, nach L, nach R1, nach R2), Spieler 2 nach r)

c) **(13 P)**
Siehe beste Antworten in Baum oben.
(+3 P für letzte TS, +3 für beide b.A. im TS davor, +2 P erster Move)
$[(r, a, x, y), L]$ und $[(d, a, x, y), R2]$ **(+2 P)**

TSP-Ergebnis: r-R2-y und d **(3 P)**

d) Die Entscheidungsknoten nach R1 und R2 werden durch einen Informationsbezirk verbunden. **(2 P)**

e) **(insgesamt 16 P)**
a nach L bleibt eine b.A. von Spieler 1. **(1 P)**
In dem Informationsbezirk ist die b.A. von 1 (belief $p_1 \to R_1$, $(1 - p_1) \to R_2$)

$$\begin{cases} x & \text{wenn } 4p_1 + 0 \geq 2p_u + 3(1 - p_1) \iff p_1 \geq \frac{3}{5} \\ y & \text{wenn } p_1 \leq \frac{3}{5} \\ x \sim y & \text{wenn } p_1 = \frac{3}{5} \quad \textbf{(3 P)} \end{cases}$$

Wenn $p_1 \geq \frac{3}{5}$, spielt 1 also x nach R. Dann ist die b.A. von 2 $R2$ oder L $(4(R2) = 4(L) > 1(R1))$. **(2 P)** Bei R2 wäre $p_1 = 0$. Widerspruch. **(2 P)**
Also b.A. L und dann kann p_1 frei gewählt werden. **(2 P)**

Wenn $p_1 \leq \frac{3}{5}$, spielt 1 y. Dann ist die b.A. von 2 $R1$ ($7(R1) > 4(R2) = 4(L)$). Also ist nur $p_1 = 1$ konsistent. Widerspruch. **(2 P)**

Das TS wird durch die TSP-GG-Auszahlung (5,4) ersetzt. Die b.A. von 1 ist r. **(2 P)**
PBGG: $[(r, a, x), L; p_1 \geq \frac{3}{5}]$ **(2 P)**

Aufgabe 2

a) Bei einem Signalisierspiel entscheidet der privat informierte Spieler zuerst. Hier entscheiden beide gleichzeitig. **(3 P)**

b) **(6 P , 2 P, 2 P)**
$\pi_1 = \frac{1}{2}(2(x + y_L + xy_L) - x^2) + \frac{1}{2}(2(x + y_H + xy_H) - x^2)$
$\pi_{2,L} = 2(x + y_L + xy_L) - y_L^2$
$\pi_{2,H} = 2(x + y_H + xy_H) - 2y_H^2$

c) **(3 P , 2 P, 2 P)**

$$
\begin{aligned}
&FOC1: && \frac{1}{2}(2 + 2y_L - 2x + 2 + y_H - 2x) = 0 && \iff x^* = 1 + \frac{y_L + y_H}{2} \\
&FOC2, L: && 2 + 2x - 2y_L = 0 && \iff y_L^* = 1 + x \\
&FOC2, H: && 2 + 2x - 4y_H = 0 && \iff y_H^* = \frac{1 + x}{2}
\end{aligned}
$$

d) **(5 P)**
FOC 2,L und 2,H in FOC1 : $x^* = 1 + \frac{3(1+x)}{4} \iff x^* = 7$
in FOC 2: $y_L^* = 1 + 7 = 8$ und $y_H^* = 8/2 = 4$.
BNGG: $(x^*, (y_L^*, y_H^*)) = (7, (8, 4))$.

Aufgabe 3

TEIL I: (12 P)
a) **(3 P)**

Beste Antworten markieren:

		Spieler 2 L	Spieler 2 R
Spieler 1	U	**4**, **1**	2, 0
	D	2, **1**	**5**, **1**

2 reine NGG: (U,L) und (D,R).

b) **9 P**
Löse $\pi_1(U|q) = 4q + 2(1 - q) = 2 + 2q = \pi_1(D|q) = 2q + 5(1 - q) = 5 - 3q$
$\iff q = \frac{3}{5}$ **(+2 P)**
$\pi_2(L|p) = 1p + 1(1 - p) = 1 > \pi_2(R|p) = 0 + 1(1 - p) = 1 - p$ für alle $p > 0$.

Spieler 2 mischt nur, wenn Spieler 1 immer D spielt, $p = 0$. **(+2 P)**
NGG: $(D, (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})) = ((0,1), (\frac{3}{5}, \frac{2}{5}))$ **(+1 P)**
Es gibt aber unendlich viele weiter NGG:
$\pi_1(D|q) \geq \pi_1(U|q) \iff q \leq \frac{3}{5}$
NGG: $((0,1), (q, 1-q)$ mit $q \leq \frac{3}{5})$ **(+4 P)**

TEIL II: (16 P)
c) D ist strikt dominant. **(+2 P)**
Es ist ein Gefangenendilemma, wobei die Auszahlungen von Spieler 2 mit 2 multipliziert sind.
(D,D) ist das NGG in dominanten Strategien. **(+1 P)**

d) **(13 P)**
Folgt Spieler 2 der Strategie, bekommt Spieler 1 vom Folgen $\phi_{F1} = 2$. **(+2 P)**
Folgt Spieler 1 der Strategie, bekommt Spieler 2 vom Folgen $\phi_{F2} = 2\phi_{F1} = 4$. **(+1 P)**

Die beste Abweichung erzielt $\phi_{A1} = (1-\delta)(4 + \frac{\delta}{1-\delta}1) = 4 - 3\delta$. **(+3 P)**
1 möchte nicht abweichen, wenn $\phi_{F1} = 2 \geq \phi_{A1} = 4 - 3\delta \iff \delta \geq \frac{2}{3}$. **(+3 P)**
Die Bedingung für Spieler 2 ist identisch, da lediglich alle Auszahlungen mit zwei multipliziert sind bzw. Wiederholung der Schritte oben **(+4 P)**