Prof. Dr. Radosveta Ivanova-Stenzel
Michel Tolksdorf

SPIELTHEORIE

KLAUSUR WS 2019/20

19. Februar 2020

Name:

Matrikelnummer:

Studienfach:

Zutreffendes bitte ankreuzen: Bachelor ☐
Master ☐

Unterschrift:

Lösen Sie **alle 3** Aufgaben!

Geben Sie zu Ihren Ergebnissen **immer den Lösungsweg** an. Ergebnisse, deren Ermittlung nicht nachvollzogen werden kann, werden **nicht gewertet!**

Sie haben **90** Minuten Zeit.

Erlaubtes (aber nicht notwendiges) Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer Taschenrechner.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1 (*24 Punkte*)

Betrachten Sie das folgende Spiel in Normalform:

		Spieler **2**		
		L	C	R
	T	4, 3	2, 2	1, 1
Spieler **1**	B	2, 3	2, **X**	3, 4

a) Angenommen $\mathbf{X} = 4$:

  a1) Gibt es in dem Spiel strikt dominante Strategien? Begründen Sie.

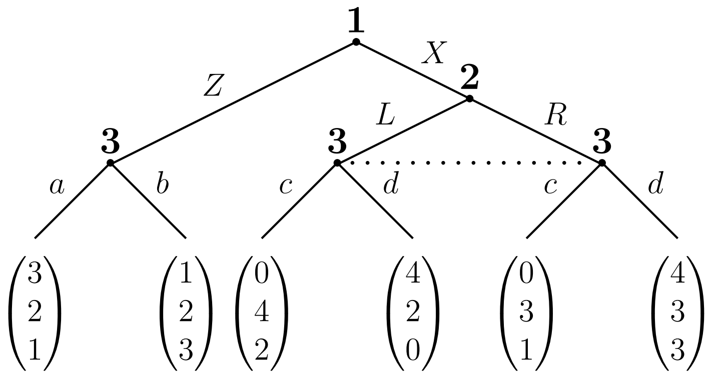
  a2) Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien.

b) Für welche Werte von $\mathbf{X}$ ist die Strategie 'R' von Spieler 2 eine strikt dominierte Strategie?

c) Angenommen $\mathbf{X} = 5$: Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien.

Aufgabe 2 (*36 Punkte*)

Teil 1 - Betrachten Sie folgendes Spiel in extensiver Form:



In jedem Auszahlungsvektor bezeichnet die erste Zahl die Auszahlung für Spieler 1, die zweite Zahl die Auszahlung für Spieler 2 und die dritte Zahl die Auszahlung für Spieler 3.

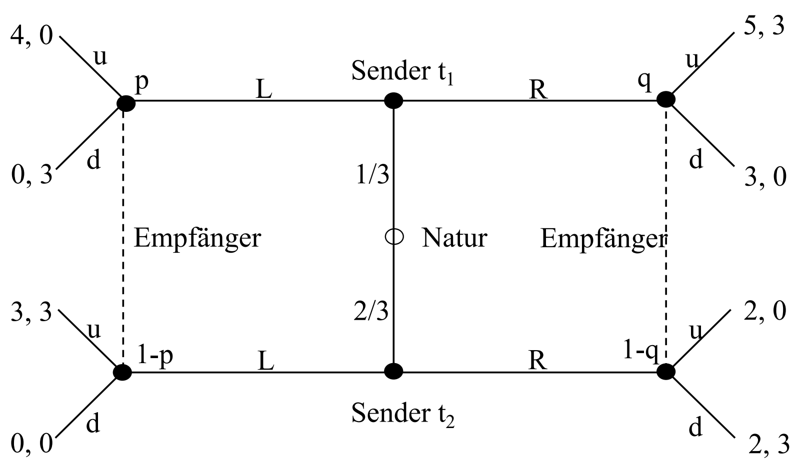
a) Markieren Sie alle echten Teilspiele (Das Gesamtspiel wird nicht als Teilspiel gewertet).

b) Aus wie vielen Aktionen bestehen die Strategien von Spieler 1, Spieler 2 und Spieler 3?

c) Bestimmen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte in reinen Strategien und die dazugehörigen teilspielperfekten Ergebnisse.

d) Sind alle teilspielperfekten Gleichgewichte aus c) perfekte Bayesianische Gleichgewichte? Begründen Sie.

Teil 2 - Betrachten Sie folgendes Signalisierspiel:



d) Gibt es ein *separating* perfektes Bayesianisches Gleichgewicht bei dem Sender t_1 die Nachricht 'R' und Sender t_2 die Nachricht 'L' spielt? Begründen Sie.

e) Gibt es ein *pooling* perfektes Bayesianisches Gleichgewicht, bei denen beide Sendertypen 'R' spielen und der Belief $p = 2/3$ ist? Wenn ja, wie sieht dieses Gleichgewicht aus, wenn nein, warum gibt es keins?

Aufgabe 3 (*30 Punkte*)

Betrachten Sie ein Cournot-Duopol-Spiel. Beide Firmen haben konstante Stückkosten von c mit $0 < c < 1$ und keine Fixkosten. Beide Firmen setzen simultan ihre Mengen. Firma $i \in \{1, 2\}$ maximiert die Gewinnfunktion $\pi_i(q_i, q_j) = (a - q_i - q_j - c)q_i$, wobei $j \in \{1, 2\}, j \neq i$, die andere Firma ist.

Teil 1: Nehmen Sie an die Nachfrage ist unsicher und mit Wahrscheinlichkeit 1/6 hoch ($a = a_H$), mit Wahrscheinlichkeit 1/3 mittel ($a = a_M$) und mit Wahrscheinlichkeit 1/2 niedrig ($a = a_L$). Unternehmen 1 ist über die Nachfrage informiert und weiß, ob die Nachfrage hoch, mittel oder niedrig ist. Unternehmen 2 weiß nur, dass die Nachfrage mit Wahrscheinlichkeit $p_H = 1/6$ hoch, mit Wahrscheinlichkeit $p_M = 1/3$ mittel und mit Wahrscheinlichkeit $p_L = 1/2$ niedrig ist.

a) Aus wie vielen Aktionen besteht die Strategie von Firma 1?

b) Geben Sie das Gewinnmaximierungsproblem von Firma 2 an.

Teil 2: Nehmen Sie nun an, die Nachfrage ist allen bekannt mit $a = 1$. Jedoch wird das Spiel mehrere Perioden wiederholt. Beide Firmen beobachten das Ergebnis der vorherigen Periode. Sie maximieren den Gegenwartswert des Gewinns, wobei beide Firmen den Diskontfaktor $\delta \in (0, 1)$ verwenden.

Ein Monopolist würde unter den gegebenen Bedingungen die Menge $q^M = \frac{1-c}{2}$ produzieren und damit den Gewinn $\pi^M = \left(\frac{1-c}{2}\right)^2$ erzielen.

Im eindeutigen Nash–Gleichgewicht des statischen Spiels setzen beide Firmen die Menge $q^C = \frac{1-c}{3}$ und erzielen einen Gewinn von $\pi^C = \left(\frac{1-c}{3}\right)^2$.

c) Nehmen Sie an, das Spiel wird einmal wiederholt. Warum können sich beide Firmen in der ersten Runde nicht auf eine Gesamtmenge von q^M koordinieren? Begründen Sie.

d) Nehmen Sie an, das Spiel wird unendlich oft wiederholt. Betrachten Sie die folgende "limited punishment" Strategie: "Am Anfang oder falls die andere Firma in der vorherigen Runde $\frac{q^M}{2}$ produziert hat, produziere ebenfalls $\frac{q^M}{2}$. Falls die andere Firma eine andere Menge produziert hat, produziere für zwei Runden die Menge q^C und danach wieder $\frac{q^M}{2}$." Ist das wechselseitige Spielen dieser Strategie ein Nash–Gleichgewicht bei $\delta = \frac{1}{2}$? Begründen Sie.

<u>*Hinweis:*</u> $1 + \delta^\tau + \delta^{2\cdot\tau} + \delta^{3\cdot\tau} + ... = \frac{1}{1-\delta^\tau}$

Lösung

Aufgabe 1 (*24 Punkte*)

a) a1) Keine strikt dominanten Stragien. **4p**
   a2) (T, L); (B, C); (B, R) **6p**

b) R nicht durch L dominiert, durch C dominiert, falls $X > 4$ **4p**

c) Für $\mathbf{X} = 5$: Streiche R
   $T \sim B \quad \rightarrow \quad q = 0$ *(+2p)*
   $L \sim C \quad \rightarrow \quad p = 2/3$ *(+2p)*
   $L \prec C \quad \rightarrow \quad p < 2/3$ *(+4p)*
   GGs: $\big((p^*, 1-p^*);\ (0,1,0);\ p^* \leq 2/3)\big)$ *(+2p)* **10p**

Aufgabe 2 (*36 Punkte*)

Teil 1 (*21 Punkte*)

a) Nach $\mathbf{Z}$ *(+1p)*, Nach $\mathbf{X}$ *(+2p)* **3p**

b) Spieler 1: 1 Aktion *(+1p)*, Spieler 2: 1 Aktion *(+1p)*, Spieler 3: 2 Aktionen *(+2p)* **4p**

c) TS nach $\mathbf{Z}$: b *(+1p)*, TS nach $\mathbf{X}$: (L, c); (R, d) *(+2p)*
   GGs: $\big(Z,\ L,\ (b,\ c)\big)$ *(+3p)* Ergebnis: (Z, b) *(+1p)*
   $\big(X,\ R,\ (b,\ d)\big)$ *(+3p)* Ergebnis: (X, R, d) *(+1p)* **11p**

d) Belief hinzufügen p - Belief nach L. *(+1p)*
   $\big(Z,\ L,\ (b,\ c),\ p = 1\big)$ *(+1p)* $\big(X,\ R,\ (b,\ d),\ p = 0\big)$ *(+1p)* **3p**

Teil 2 (*15 Punkte*)

a) $q = 1,\ p = 0$ *(+2p)* BA Empfänger: $(u,\ u)$ *(+2p)* Sender weichen nicht ab *(+2p)*
   GG: $\big((R,\ L);\ (u,\ u);\ p = 0;\ q = 1\big)$**6p**

b) $q = 1/3$ *(+1p)*, BA Empfänger nach R: $E(u) = 1$ *(+1p)* $E(d) = 2$ *(+1p)*
   $E(d) > E(u)$, Empfänger spielt d *(+1p)*
   $p = 2/3$, BA Empfänger nach L: $E(u) = 1$ *(+1p)*, $E(d) = 2$ *(+1p)*
   $E(d) > E(u)$, Empfänger spielt d *(+1p)*
   Sender t_1: $R \succ L$ *(+1p)*, Sender t_2: $R \succ L$ *(+1p)*
   GG: $\big((R,\ R);\ (d,\ d);\ p = 2/3;\ q = 1/3\big)$ **9p**

   <u>Alternativ:</u>

   $q = 1/3$ *(+1p)*, BA Empfänger nach R: $E(u) = 1$ *(+1p)* $E(d) = 2$ *(+1p)*
   $E(d) > E(u)$, Empfänger spielt d *(+1p)*
   Sender Anreiz abzuweichen? t_1 ja, t_2 ja, Empfänger muss d nach L spielen *(+2p)*
   Nach L: $d \succ u$ falls $E(d) > E(u) \iff p \geq 1/2$ *(+2p)*, $p = 2/3 > 1/2$ *(+1p)*
   GG: $\big((R,\ R);\ (d,\ d);\ p = 2/3;\ q = 1/3\big)$ **9p**

Aufgabe 3 (*30 Punkte*)

a) Aus 3 Aktionen **2p**

b)

$$\begin{aligned}\Pi_2 = &\tfrac{1}{6}(a_H - q_2 - q_1^H - c)\cdot q_2\\ &+\tfrac{1}{3}(a_M - q_2 - q_1^M - c)\cdot q_2\\ &+\tfrac{1}{2}(a_L - q_2 - q_1^L - c)\cdot q_2\end{aligned}$$

Menge q_2 und c *(+1p)* Korrekte Wahrscheinlichkeiten mit Zuordnung *(+3p)* und Mengen Firma 1 *(+3p)* Korrekte $a^H,\ a^M,\ a^L$ *(+3p)* **10p**

c) Nein, es gibt ein eindeutiges NGG im Basisspiel. *(+2p)* **2p**

d) Payoff Strategie folgen:
entweder $NPV = \frac{\Pi^M}{2(1-\delta)} = \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2(1-\delta)}$
oder $\phi_{Folgen} = \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$ *(+2p)*

$\frac{q^M}{2} = \frac{1-c}{4}$
$\max \Pi^D(q^D) = (1 - \frac{q^M}{2} - q^D - c)q^D$ *(+2p)*
FOC: $q^{D*} = \frac{3(1-c)}{8}$ *(+2p)*
$\Pi^{D*} = \Pi^D(q^{D^*}) = \left(\frac{3(1-c)}{8}\right)^2$ *(+2p)*

Payoff beste Abweichung:
$NPV = \frac{\Pi^{D^*}}{1-\delta^3} + \frac{\Pi^C(\delta+\delta^2)}{(1-\delta^3)} = \frac{\Pi^C}{1-\delta} + \frac{\Pi^{D^*}-\Pi^C}{1-\delta^3}$ *(+5p)*
(Erster Summand *+2*, Zweiter Summand *+3*)

Nash-GG-Bedingung: $\frac{\Pi^M}{2(1-\delta)} \geq \frac{\Pi^{D*}+\Pi^C(\delta+\delta^2)}{(1-\delta^3)}$ *(+2p)*
$1 \geq \frac{6.5+\frac{2}{3}}{7}$ hält nicht! *(+1p)* **16p**