Aufgabe 1

X_i : „ Wartezeit beim i–ten Einkauf [in Min] “ ; X ist $N(\mu;\sigma^2) \sim N(\mu;4)$; $\alpha = 0{,}01$; $n = 16$

1) Einseitiger Einstichproben–Gaußtest auf μ 1

2) $H_0 : \mu \geq \mu_0 \,(=8)$ 2
   $\alpha \cong P$ („ weiterhin begleiten “ / Wartezeit zu groß) 1
   $H_1 : \mu < \mu_0 \,(=8)$ 1

3) $\overline{X}$: „ ∅ Wartezeit bei . . . einfachen . . . n = 16 “ 1

   $\overline{X}$ ist unter H_0 ungünstigstenfalls $N\left(\mu_0 ; \frac{\sigma^2}{n}\right) \sim N\left(8 ; \frac{4}{16}\right) \sim N(8;0{,}25)$

4) $V = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ist unter H_0 (ungünstigstenfalls) $N(0;1)$ 1

5) Annahmeber. : $\left\{ \overline{x} \,\middle|\, \overline{x} \geq \underbrace{\mu_0 - c\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{6{,}835} \right\}$ und $B : \left\{ \overline{x} \,\middle|\, \overline{x} < \underbrace{\mu_0 - c\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{6{,}835} \right\}$ 2

   bzw. Ann.ber. : $\{ v \mid v \geq -c \}$ und $B : \{ v \mid v < -c \}$ mit $c = 2{,}33$

6)
   a) $P(\text{"}H_0\text{"}/\mu_1 = 6{,}3 \in H_1) \cong \beta_{(\mu_1=6{,}3)} = P(\overline{X} \geq 6{,}835/\mu_1 = 6{,}3 \in H_1) = P\left(V \geq \frac{6{,}835-6{,}3}{0{,}5}\right) = P(V \geq +1{,}07)$

   $= 1 - P(V < +1{,}07) = 1 - 0{,}85769 = \underline{0{,}14231}$ 2

   b) $P(\text{"}H_1\text{"}/\mu_2 = 8{,}1 \in H_0) \cong \alpha_{(\mu_2=8{,}1)} = P(\overline{X} < 6{,}835/\mu_2 = 8{,}1 \in H_0) = P\left(V < \frac{6{,}835-8{,}1}{0{,}5}\right) = P(V < -2{,}53)$

   $= P(V > +2{,}53) = 1 - P(V \leq +2{,}53) = 1 - 0{,}994297 = \underline{0{,}005703}$ 2

   4

7)
   a) $g(\mu_3 = 6{,}835) = P(\text{"}H_1\text{"}/\mu_3 = 6{,}835 \in H_1) \cong 1 - \beta_{(\mu_3=6{,}835)} = \ldots = \underline{0{,}5}$ 2

   b) $g(\mu_4 = 7{,}5) = P(\text{"}H_1\text{"}/\mu_4 = 7{,}5 \in H_1) \cong 1 - \beta_{(\mu_4=7{,}5)} = 1 - P(\overline{X} \geq 6{,}835/\mu_4 = 7{,}5 \in H_1)$

   $= 1 - P\left(V \geq \frac{6{,}835-7{,}5}{0{,}5}\right) = 1 - P(V \geq -1{,}33) = 1 - P(V \leq +1{,}33) = 1 - 0{,}908241 = \underline{0{,}091759}$ 2

   4

8) $P(\text{"}H_1\text{"}/\mu_5 = 7{,}5 \in H_1) \cong 1 - \beta_{(\mu_4=7{,}5)} \overset{!}{=} 0{,}881$

   $\Rightarrow P\left(\overline{X} < \mu_0 - c_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} / \mu_4 = 7{,}5 \in H_1\right) \overset{!}{=} 0{,}881$

   $$\Rightarrow P\left(\frac{\overline{X}-7{,}5}{\frac{2}{\sqrt{n}}} \leq \underbrace{\frac{8-2{,}33\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}-7{,}5}{\frac{2}{\sqrt{n}}}}_{c_{1-\beta}} \right) \overset{!}{=} 0{,}881 \Rightarrow P(V \leq c_\beta) \overset{!}{=} 0{,}881 \Rightarrow c_{1-\beta} = +1{,}18$$

   4

   $$\Rightarrow \frac{8-2{,}33\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}-7{,}5}{\frac{2}{\sqrt{n}}} = +1{,}18 \Rightarrow \frac{4{,}66+2{,}36}{\sqrt{n}} = 0{,}5 \Rightarrow 0{,}5\cdot\sqrt{n} = 7{,}02 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{7{,}02}{0{,}5} = 14{,}04 \Rightarrow n = 197{,}1216 \Rightarrow \underline{n \geq 198}$$

   $$\sum_{i=1}^{16} x_i = 111 \Rightarrow \overline{x} = \frac{111}{16} = 6{,}9375$$

9) Da $\overline{x} = 6{,}9375 \notin B$ ⇨ **„ H_0 “** 1

10) Auf einem … von 1 % basierend auf … einfachen … vom Umfang n = 16 konnte statistisch <u>nicht</u> nachgewiesen werden, dass die wahre durchschnittliche Wartezeit kleiner ist als 8 Minuten. 1

    Künftig <u>keine</u> Begleitung !

11) β – Fehler 1

12) Diese Wahrscheinlichkeit gibt es nicht ! 1
    Die getroffene Entscheidung ist entweder richtig oder falsch !

13) $\alpha = 0{,}1$ ⇨ $c = 1{,}29$, d.h. $B : \{ \overline{x} / \overline{x} < 7{,}355 \}$ 1

    Da $\overline{x} = 6{,}9375 \in B$ ⇨ **„ H_1 “**

14) Ein „ trennscharfer “ Test trennt die Hypothesenbereiche H_0 und H_1 in dem Sinne scharf, dass er bereits kleinste Abweichungen in Richtung H_1 mit hohen <u>berechtigten</u> Ablehnwahrscheinlichkeiten bzw. kleinste Abweichungen in Richtung H_0 mit kleinen <u>unberechtigten</u> Ablehnwahrscheinlichkeiten registriert ! 1

25

Aufgabe 2

A

i	Punktezahlen von … bis unter	h_i	π_i	$n \cdot \pi_i$	$h_i - n \cdot \pi_i$	$(h_i - n \cdot \pi_i)^2$	$\frac{(h_i - n \cdot \pi_i)^2}{n \cdot \pi_i}$
1	< 52	8	0,023	5,888	2,112	4,461	0,758
2	52 – 61	21	0,136	34,816	−13,816	190,882	5,483
3	61 – 70	92	0,341	87,296	4,704	22,128	0,253
4	70 – 79	91	0,341	87,296	3,704	13,720	0,157
5	79 – 88	35	0,136	34,816	0,184	0,034	0,001
6	≥ 88	9	0,023	5,888	3,112	9,685	1,645
		n = 256					v ≅ 8,297

1 1) χ^2 – Anpassungstest

1 2) H_0: Die Häufigkeitsverteilung folgt einer $N(\mu = 70 ; \sigma^2 = 81)$

; $\alpha = 0{,}05$

H_1: Die Häufigkeitsverteilung folgt nicht einer $N(\mu = 70 ; \sigma^2 = 81)$

1 3) $V = \sum_{i=1}^{I} \frac{(h_i - n \cdot \pi_i)^2}{n \cdot \pi_i}$ ist **unter H_0** approximativ χ^2-verteilt mit $f = I - 1 - k$

$n\pi_i \geq 1$	für alle Kategorien
$n\pi_i \geq 5$	für mindestens 80 % aller Kat.

2 4) Annahmeber. : $\{ v / v \leq c \}$

B : $\{ v / v > c \}$ c aus $\chi^2_{[1-\alpha \, ; \, f=6-1-0=5]}$ ⇨ $c = 11{,}07$

6 5) Da $v \cong 8{,}297 \notin B$ ⇨ **„H_0"**

1 6) Auf einem … von 5 % basierend auf … einfachen … vom Umfang n = 256 konnte statistisch nicht nachgewiesen werden, dass die Häufigkeitsverteilung für die erreichten Punktezahlen der Bewerber einer Normalverteilung mit $\mu = 70$ und $\sigma^2 = 81$ folgt.

nicht

2 7) Es mussten beide Verteilungsparameter der Normalverteilung geschätzt werden, was den Verlust von 2 Freiheitsgraden bedeutet, d.h. jetzt gilt :

Annahmeber. : $\{ v / v \leq c \}$

B : $\{ v / v > c \}$ c aus $\chi^2_{[1-\alpha \, ; \, f=6-1-2=3]}$ ⇨ $c = 7{,}81$

Da $v \cong 8{,}297 \in B$ ⇨ **„H_1"**, die Testentscheidung ändert sich !

B

1 1) Vierfeldertafel–Analyse
χ^2 – Test für zwei unabhängige Stichproben

	bestanden	nicht bestanden	
weiblich	*65* a = 64	*15* b = 16	80 = n_1
männlich	*143* c = 144	*33* d = 32	176 = n_2
	208	48	n = 256

1 2) H_0: Prüfungserfolg ist bei beiden Geschlechtern gleich

H_1: Prüfungserfolg ist bei beiden Geschlechtern nicht gleich

1 3) $$V = \frac{n \cdot (a \cdot d - b \cdot c)^2}{(a+b) \cdot (c+d) \cdot (a+c) \cdot (b+d)}$$

ist unter H_0 approximativ χ^2 – verteilt mit $f = 1$, falls die **erwartete Besetzungszahl** in jeder Zelle ≥ 5 ist.

2 4) Annahmebereich : $\{ v / v \leq c \}$

B : $\{ v / v > c \}$ mit $c_{[\alpha = 0{,}05 \, ; \, f=1]} = 3{,}84$

5 $$v = \frac{256 \cdot (64 \cdot 32 - 16 \cdot 144)^2}{80 \cdot 176 \cdot 208 \cdot 48} = \frac{256 \cdot (2048 - 2304)^2}{140574720} = \frac{16777216}{140574720} = 0{,}119347319 \cong 0{,}119$$

5) Da $v \cong 0{,}119 \notin B$ ⇨ **„H_0"**

1 6) Auf einem … von 5 % basierend auf … zwei jeweils einfachen und untereinander unabhängigen … vom Umfang $n_1 = 80$ bzw. $n_2 = 176$ konnte statistisch nicht nachgewiesen werden, dass es ~~keinen~~ geschlechtsspezifischen Unterschied gibt.

einen

/25

Aufgabe 3

V_i : „ Anzahl der verlorenen Spiele beim i–ten Spiel " ; V_i ist Bernoulli-vert. mit π_V

$$V=\sum_{i=1}^{n} V_i \quad \text{ist } B(n;\pi_V)$$

1 1) $E(V)=n\cdot\pi_V$ $\qquad$ $[\ Var(V)=n\cdot\pi_V\cdot(1-\pi_V)\ ]$

4 2) $Q[\pi_V \mid v_1, v_2, \dots, v_n]=\sum_{i=1}^{n}[v_i-\mu(\pi_V)]^2$ mit $\mu(\pi_V)=\pi_V$

$$Q[\pi_v]=\sum_{i=1}^{n}[v_i-\mu(\pi_V)]^2=(0-\pi_V)^2\cdot(n-v)+(1-\pi_V)^2\cdot v$$

$$=n\cdot\pi_v{}^2-v\cdot\pi_v{}^2+v-2\cdot v\cdot\pi_v+v\cdot\pi_v{}^2=n\cdot\pi_v{}^2-2\cdot v\cdot\pi_v+v$$

2 3) $$\left.\frac{dQ}{d\pi_V}=\right]2\cdot n\cdot\pi_V-2\cdot v\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad \hat{\pi}_V=\frac{v}{n}$$

x	− 1	0	+ 1
P (X = x)	π_V	π_U	π_G

1 4) $$\hat{\Theta}_{KQ}=\frac{V}{n}$$

1 5) $E(X)=-1\cdot\pi_V+0\cdot\pi_U+1\cdot\pi_G=\pi_G-\pi_V$

1 6)

x^2	$(-1)^2$	0^2	$(+1)^2$
$P(X^2=x^2)$	π_V	π_U	π_G

1 7) $E(X^2)=(-1)^2\cdot\pi_V+0^2\cdot\pi_U+1^2\cdot\pi_G=\pi_G+\pi_V$

3 8) $$E(\hat{\Theta}_W)=E\left[\frac{1}{2\cdot n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-X_i\right)\right]=\frac{1}{2\cdot n}\cdot E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-X_i\right)\right]=\frac{1}{2\cdot n}\left[\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^2\right)-\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right]$$

$$=\frac{1}{2\cdot n}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}(\pi_G+\pi_V)-\sum_{i=1}^{n}(\pi_G-\pi_V)\right]=\frac{1}{2\cdot n}\cdot[n\cdot(\pi_G+\pi_V)-n\cdot(\pi_G-\pi_V)]=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi_V=\pi_V$$

Information : $2\cdot\pi_V=\pi_U$

2 9)

x	− 1	0	+ 1
P (X = x)	π_V	$2\cdot\pi_V$	$1-3\cdot\pi_V$

$$L[\pi_v]=\pi_v{}^v\cdot(2\cdot\pi_v)^u\cdot(1-3\cdot\pi_v)^g=2^u\cdot\pi_v{}^{u+v}\cdot(1-3\cdot\pi_v)^g$$

$$\ln L[\pi_V]=u\cdot\ln(2)+(u+v)\cdot\ln(\pi_V)+g\cdot\ln(1-3\cdot\pi_V)$$

6 10) $$\left.\frac{dL}{d\pi_V}=\right](1-3\cdot\pi_V)^g\cdot 2^u\cdot(u+v)\cdot\pi_V{}^{u+v-1}+2^u\cdot\pi_V{}^{u+v}\cdot g\cdot(1-3\cdot\pi_V)^{g-1}\cdot(-3)\overset{!}{=}0$$

$$\Rightarrow 2^u\cdot(u+v)\cdot\hat{\pi}_V{}^{u+v-1}\cdot(1-3\cdot\hat{\pi}_V)^g=3\cdot 2^u\cdot\hat{\pi}_V{}^{u+v}\cdot g\cdot(1-3\cdot\hat{\pi}_V)^{g-1}$$

$$\Rightarrow (u+v)\cdot(1-3\cdot\hat{\pi}_V)=3\cdot g\cdot\hat{\pi}_V \Rightarrow u-3\cdot u\cdot\hat{\pi}_V+v-3\cdot v\cdot\hat{\pi}_V=3\cdot g\cdot\hat{\pi}_V$$

$$\Rightarrow u+v=3\cdot\hat{\pi}_V\cdot(u+v+g)\Rightarrow u+v=3\cdot\hat{\pi}_V\cdot n\Rightarrow\hat{\pi}_V=\frac{u+v}{3\cdot n}$$

oder :

$$\left.\frac{d\ln L[\pi_v]}{d\pi_v}=\right]0+\frac{u+v}{\pi_v}+\frac{g}{(1-3\cdot\pi_v)}\cdot(-3)\overset{!}{=}0$$

$$\Rightarrow\frac{u+v}{\hat{\pi}_v}=\frac{3\cdot g}{(1-3\cdot\hat{\pi}_v)}\Rightarrow(u+v)\cdot(1-3\cdot\hat{\pi}_v)=3\cdot g\cdot\hat{\pi}_v\Rightarrow u-3\cdot u\cdot\hat{\pi}_v+v-3\cdot v\cdot\hat{\pi}_v=3\cdot g\cdot\hat{\pi}_v$$

$$\Rightarrow u+v=3\cdot\hat{\pi}_v\cdot(u+v+g)\Rightarrow u+v=3\cdot\hat{\pi}_v\cdot n\Rightarrow\hat{\pi}_v=\frac{u+v}{3\cdot n}$$

1 11) $$\hat{\Theta}_{ML}=\frac{U+V}{3\cdot n}$$

2 12) $$E(\hat{\Theta}_{ML})=E\left(\frac{U+V}{3\cdot n}\right)=\frac{1}{3\cdot n}\cdot E(U+V)=\frac{1}{3\cdot n}\cdot[E(U)+E(V)]=\frac{1}{3\cdot n}\cdot[n\cdot\pi_u+n\cdot\pi_v]$$

$$=\frac{1}{3\cdot n}\cdot[n\cdot 2\cdot\pi_v+n\cdot\pi_v]=\frac{3\cdot n\cdot\pi_v}{3\cdot n}=\pi_v$$

/25

Matr. Nr. :

Aufgabe MC

A	B	C	D	E
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

≅ **richtig**

Aufgabe MC	Punkte