Aufgabe 1

A

X_i : „ Reisekosten am i–ten Tag " $[\, i = 1, \dots, 32 \,]$

X_i ist beliebig verteilt mit $E(X_i) = \mu$; $Var(X_i) = \sigma^2$

1) Einseitiger approximativer Einstichproben–Gaußtest 1

2) $H_0 : \mu \geq \mu_0 (= 30)$ 2

$H_1 : \mu < \mu_0 (= 30)$ 1 $\alpha \cong P$ („ Verlängern " / tägl. Kosten zu hoch) ; $\alpha = 0{,}025$ 1

3) $\bar{X}$: „ ∅ Reisekosten pro Tag bei . . . einfachen . . . n = 32 " 1

$\bar{X}$ ist unter H_0 ungünstigstenfalls $\overset{n>30\,(ZGS)}{\text{approximativ}}$ $N\left(\mu_0 ; \frac{\sigma^2}{n}\right) \sim N\left(30; \frac{2}{32}\right) \sim N\left(30; \frac{1}{16}\right) \sim N\left(30\,;\, 0{,}25^2\right)$

4) $V = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ ist unter H_0 (ungünstigstenfalls) approximativ $N(0;1)$ 1

5) Annahmeber. : $\left\{ \bar{x} \,\middle|\, \bar{x} \geq \underbrace{\mu_0 - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{29{,}51} \right\}$ und B: $\left\{ \bar{x} \,\middle|\, \bar{x} < \underbrace{\mu_0 - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{29{,}51} \right\}$ 2

bzw. Ann.ber. : $\{ v \mid v \geq -c \}$ und B : $\{ v \mid v < -c \}$ mit $c = 1{,}96$

6)

a) $P(\text{"}H_1\text{"} / \mu_1 = 30{,}5 \in H_0) \cong \alpha_{(\mu_1 = 30{,}5)} = P(\bar{X} < 29{,}51 / \mu_1 = 30{,}5 \in H_0) = P\left(V < \frac{29{,}51 - 30{,}5}{0{,}25}\right)$ 4

$= P(V < -3{,}96) = P(V > +3{,}96) = 1 - P(V \leq +3{,}96) = 1 - 0{,}999963 = \underline{0{,}000037}$ 2

b) $P(\text{"}H_0\text{"} / \mu_2 = 29{,}3 \in H_1) \cong \beta_{(\mu_2 = 29{,}3)} = P(\bar{X} \geq 29{,}51 / \mu_2 = 29{,}3 \in H_1) = P\left(V \geq \frac{29{,}51 - 29{,}3}{0{,}25}\right)$

$= P(V \geq +0{,}84) = 1 - P(V < +0{,}84) = 1 - 0{,}799546 = \underline{0{,}200454}$ 2

7) $P(\text{"}H_1\text{"} / \mu^* \in H_1) \cong 1 - \beta_{(\mu^*)} \overset{!}{=} 0{,}879$ 1 5

$\Rightarrow P\left(\bar{X} < \mu_0 + c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} / \mu^* \in H_1\right) \overset{!}{=} 0{,}879$

$\Rightarrow P\left(V < \underbrace{\frac{30 - \underbrace{1{,}96}_{c_\alpha} \cdot 0{,}25 - \mu^*}{0{,}25}}_{c_{1-\beta}} \right) \overset{!}{=} 0{,}879 \Rightarrow P(V < c_{1-\beta}) \overset{!}{=} 0{,}879 \Rightarrow \underline{c_{1-\beta} = 1{,}17}$ 1 1

$\Rightarrow \dfrac{30 - 1{,}96 \cdot 0{,}25 - \mu^*}{0{,}25} = 1{,}17 \Rightarrow 29{,}51 - \mu^* = 1{,}17 \cdot 0{,}25 \Rightarrow 29{,}51 - \mu^* = 0{,}2925 \Rightarrow \mu^* = \underline{29{,}2175}$ 2

$\bar{x} = \dfrac{944}{32} = 29{,}5$

8) Da $\bar{x} = 29{,}5 \in B$ ⇨ **„ H_1 "** 1

9) Auf einem Signifikanzniveau von 2,5 % basierend auf einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 32$ konnte statistisch nachgewiesen werden, dass die wahren mittleren Reisekosten pro Tag unter 30 Euro liegen, d.h. die Reise wird verlängert ! 1

B

X_i : „ Anzahl der von Kung Fu durchgeführten Beiß–Attacken bei der i–ten Fütterung "

X_i ist Bernoulli–verteilt mit π

1) $H_0 : \pi \geq \pi_0 (= 0{,}40)$ 1

keine Risikoüberlegung ! ; $\alpha = 0{,}05$

$H_1 : \pi < \pi_0 (= 0{,}40)$

2) $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$: „ Anzahl der von Kung Fu durchgeführten Beiß–Attacken . . . bei . . . einfachen . . . n = 24 " 1

Y ist unter H_0 (ungünstigstenfalls) $B(n; \pi) \sim B(24; \mathbf{0{,}4})$

3) Annber. : $\{ y / y \geq 6 \}$; B : $\{ y / y < 6 \}$; $\alpha_{ex} = 0{,}04$ 1

4) Da $y = 5 \in B$ ⇨ **„ H_1 "** ⇨ **Ja !** 1

5) **Hoffentlich keiner !** 1

$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$: „ Anzahl der von Kung Fu durchgeführten Beiß–Attacken . . . bei . . . einfachen . . . n = **45** "

6)

a) Y ist unter H_0 (ungünstigstenfalls) $B(n; \pi_0) \sim B(45; 0{,}4)$ 1 2

b) Y ist unter H_0 (ungünstigstenfalls) $\overset{n \cdot \pi_0 > 5\, ;\, n \cdot (1 - \pi_0) > 5}{\text{approximativ}}$ $N(\mu; \sigma^2) \sim N[\, n \cdot \pi_0 ; n \cdot \pi_0 \cdot (1 - \pi_0) \,]$

$\sim N(18; 10{,}8)$ 1

25

Aufgabe 2

A

	Löwe	Adler	Dachs	Schlange	
[0 – 5)	**4,87** 0	**5,48** 6	**5,48** 8	**5,17** 7	21
[5 – 10)	**6,26** 11	**7,04** 5	**7,04** 4	**6,65** 7	27
[10 – 15)	**4,87** 5	**5,48** 7	**5,48** 6	**5,17** 3	21
	$n_L = 16$	$n_A = 18$	$n_D = 18$	$n_S = 17$	$n_{ges} = 69$

1 1) χ^2 – Homogenitätstest

1 2) H_O : Alle vier Stichproben stammen aus derselben Ggh $[\pi_{iL} = \pi_{iA} = \pi_{iD} = \pi_{iS} = \pi_i]$
H_1 : Alle vier Stichproben stammen **nicht** aus derselben Ggh

1 3) $V = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}}$ ist **unter H_O** approximativ χ^2 – verteilt mit $f = (I-1)\cdot(J-1) = (3-1)\cdot(4-1) = \mathbf{6}$

$\tilde{h}_{ij} \geq 1$; $\tilde{h}_{ij} \geq 5$ für mind. 80 % der Zellen

2 4) Annahmeber. : { v / v ≤ c } ; B : { v / v > c } ; $c_{[\alpha = 0,05\ ;\ f = 6]} = \mathbf{12,59}$

5
$$v = \frac{(0-4,87)^2}{4,87} + \frac{(11-6,26)^2}{6,26} + \frac{(5-4,87)^2}{4,87} + \frac{(6-5,48)^2}{5,48} + \frac{(5-7,04)^2}{7,04} + \frac{(7-5,48)^2}{5,48}$$
$$+ \frac{(8-5,48)^2}{5,48} + \frac{(4-7,04)^2}{7,04} + \frac{(6-5,48)^2}{5,48} + \frac{(7-5,17)^2}{5,17} + \frac{(7-6,65)^2}{6,65} + \frac{(3-5,17)^2}{5,17} \approx \underline{13,627}$$

5) Da v ≈ 13,627 ∈ B ⇨ „**H_1**"

1 6) Basierend auf vier jeweils einfachen und untereinander unabhängigen Stichproben vom Umfang $n_L = 16$ bzw. $n_A = 18$ bzw. $n_D = 18$ bzw. $n_S = 17$ konnte auf einem Signifikanzniveau von 5 % statistisch nachgewiesen werden, dass ein (signifikanter) Unterschied im Punktesammeln zwischen den vier Haus–Kategorien besteht.

B

X_L : „ Gesammelte Punkte eines Schülers des Löwen–Hauses " ; X_L ist $N(\mu_L ; \sigma_L^2)$
X_S : „ Gesammelte Punkte eines Schülers des Schlangen–Hauses " ; X_S ist $N(\mu_S ; \sigma_S^2)$

1 1) Einseitiger Zweistichprobentest ($\mu_L \leftrightarrow \mu_S$)

2 2) $H_O : \mu_L \leq \mu_S \leftrightarrow \mu_L - \mu_S \leq \delta_O (= 0)$

<u>keine</u> Risikoüberlegung ! ; $\alpha = 0,05$

$H_1 : \mu_L > \mu_S \leftrightarrow \mu_L - \mu_S > \delta_O (= 0)$

$\bar{X}_L$: „ ∅ gesammelte Punktzahl eines Schülers des Löwen–Hauses bei ... einfachen ... $n_L = 16$ "
$\bar{X}_S$: „ ∅ gesammelte Punktzahl eines Schülers des Schlangen–Hauses bei ... einfachen ... $n_S = 17$ "

$\bar{X}_L$ ist $N\left(\mu_L ; \frac{\sigma_L^2}{n_L}\right)$; $\bar{X}_S$ ist $N\left(\mu_S ; \frac{\sigma_S^2}{n_S}\right)$

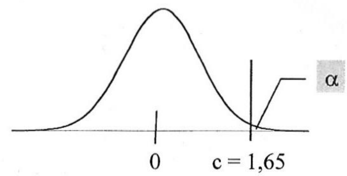
$\bar{X}_L - \bar{X}_S$: „ Differenz der durchschnittlichen gesammelten Punkte eines Schülers des Löwen–Hauses und eines Schülers des Schlangen–Hauses bei jeweils einfachen und untereinander unabhängigen Stichproben vom Umfang $n_L = 16$ bzw. $n_S = 17$ "

$\bar{X}_L - \bar{X}_S$ ist **unter H_O** *ungünstigstenfalls*

$$N\left(\overbrace{\mu_L - \mu_S}^{\delta_O} ; \frac{\sigma_L^2}{n_L} + \frac{\sigma_S^2}{n_S}\right) \sim N\left(\mathbf{0} ; \frac{\sigma^2}{n_L} + \frac{\sigma^2}{n_S}\right) \sim N\left[\mathbf{0} ; \sigma^2 \cdot \left(\frac{1}{n_L} + \frac{1}{n_S}\right)\right] \sim N\left[\mathbf{0} ; \sigma^2 \cdot \left(\frac{n_L + n_S}{n_L \cdot n_S}\right)\right]$$

3
3) $V = \frac{(\bar{X}_L - \bar{X}_S) - \mathbf{0}}{S \cdot \sqrt{\frac{n_L + n_S}{n_L \cdot n_S}}}$ ist **unter H_O** t–verteilt mit $f = n_L + n_S - 2 = 31$

$V = \frac{(\bar{X}_L - \bar{X}_S) - \mathbf{0}}{S \cdot \sqrt{\frac{n_L + n_S}{n_L \cdot n_S}}}$ ist **unter H_O** $\overset{f > 30}{\text{approximativ}}$ N (0 ; 1)



2 4) Ann.ber. : { v / v ≤ c }
B : { v / v > c } ; c = 1,65

$\bar{x}_L = 8,25$; $s_L^2 = 9,533$; $n_L = 16$; $\bar{x}_S = 6,176$; $s_S^2 = 16,029$; $n_S = 17$

5 5) $v = \frac{(8,25 - 6,176) - 0}{\sqrt{\frac{15 \cdot 9,533 + 16 \cdot 16,029}{16 + 17 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{16 + 17}{16 \cdot 17}}} = \cdots \approx \underline{+1,66}$ Da v ≅ + 1,66 ∈ B ⇨ „**H_1**"

1 6) Auf ... α = 0,05 basierend auf zwei jeweils einfachen und untereinander unabhängigen Stichproben ... $n_L = 16$ bzw. $n_S = 17$ konnte statistisch nachgewiesen werden, dass die wahre im Mittel gesammelte Punktzahl im Löwen–Haus höher ist als die wahre im Mittel gesammelte Punktzahl im Schlangen–Haus.

/25

Aufgabe 3

A

X_i : „ Gewinn beim i–ten Spiel “ (i = 1 , … , n)

2 1) ⟶

x_i	-10	-5	$+5$	$+10$
$P(X_i = x_i)$	$1-5\cdot\pi$	$2\cdot\pi$	$2\cdot\pi$	π

1 2) $$E(X)=\sum_x x\cdot P(X=x) = -10\cdot(1-5\cdot\pi)-5\cdot 2\cdot\pi+5\cdot 2\cdot\pi+10\cdot\pi = 60\cdot\pi-10$$

$$E(X)\overset{!}{=}0 \Rightarrow 60\cdot\pi=10 \Rightarrow \pi=\underline{1/6}$$

A : „ Anzahl der Spiele, bei denen man 10 € verliert “
B : „ Anzahl der Spiele, bei denen man 5 € verliert “
C : „ Anzahl der Spiele, bei denen man 5 € gewinnt “
D : „ Anzahl der Spiele, bei denen man 10 € gewinnt “

2 3) $$L[\pi|(x_1,\dots,x_n)] = (1-5\cdot\pi)^a\cdot(2\cdot\pi)^b\cdot(2\cdot\pi)^c\cdot\pi^d$$
$$= (1-5\cdot\pi)^a\cdot(2\cdot\pi)^{b+c}\cdot\pi^d$$

$$\ln L(\pi) = a\cdot\ln(1-5\cdot\pi)+(b+c)\cdot\ln(2)+(b+c)\cdot\ln(\pi)+d\cdot\ln(\pi)$$

4 4) $$\frac{d\ln L(\pi)}{d\pi} = \frac{-5\cdot a}{1-5\cdot\pi}+0+\frac{b+c}{\pi}+\frac{d}{\pi}\overset{!}{=}0 \Rightarrow \frac{b+c+d}{\hat\pi}=\frac{5\cdot a}{1-5\cdot\hat\pi} \Rightarrow (1-5\cdot\hat\pi)\cdot(b+c+d)=5\cdot a\cdot\hat\pi$$

$$\Rightarrow (b+c+d)=5\cdot\hat\pi\cdot(b+c+d)+5\cdot a\cdot\hat\pi \Rightarrow (b+c+d)=5\cdot\hat\pi\cdot(a+b+c+d)$$

$$\Rightarrow \hat\pi=\frac{(b+c+d)}{5\cdot(a+b+c+d)}=\underline{\frac{n-a}{5\cdot n}} \quad \underline{\text{Also}}: \hat\Theta_{ML}=\frac{n-A}{5\cdot n}$$

A ist B (n ; π^*) ~ B [n ; (1–5·π)]

2 5) $$E(\hat\Theta_{ML}) = E\left(\frac{n-A}{5\cdot n}\right)=\frac{1}{5\cdot n}\cdot E(n-A)=\frac{1}{5\cdot n}\cdot[n-E(A)]=\frac{1}{5\cdot n}\cdot[n-(n-5\cdot n\cdot\pi)]=\underline{\pi}$$

B

X_{ij} : „ Gefressene Futtermenge des i–ten männlichen Hamsters am j–ten Tag “ [i = 1,2] ; [j = 1, … ,7]
Y_{ij} : „ Gefressene Futtermenge des i–ten weiblichen Hamsters am j–ten Tag “ [i = 1, … ,4] ; [j = 1, … ,7]

$E(X_{ij}) = E(Y_{ij}) = 7$; $Var(X_{ij}) = Var(Y_{ij}) = 1{,}4^2 = 1{,}96$

X : „ Gefressene Futtermenge pro Woche der beiden männlichen Hamster “
Y : „ Gefressene Futtermenge pro Woche der vier weiblichen Hamster “
X + Y = G : „ Gefressene Gesamtfuttermenge aller Hamster pro Woche “

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{7}X_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{7}E(X_{ij})=2\cdot 7\cdot E(X_{ij})=2\cdot 7\cdot 7=98$$

$$E(Y)=E\left(\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{7}Y_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{7}E(Y_{ij})=4\cdot 7\cdot E(Y_{ij})=4\cdot 7\cdot 7=196$$

$$E(G)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=98+196=294$$

$$Var(X)=Var\left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{7}X_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{7}Var\left(\sum_{i=1}^{2}X_{ij}\right)=7\cdot\left[Var(X_{1j})+Var(X_{2j})+2\cdot Cov(X_{1j},X_{2j})\right]$$

$$=7\cdot\left\{Var(X_{1j})+Var(X_{2j})+2\cdot\left[E(X_{1j}\cdot X_{2j})-E(X_{1j})\cdot E(X_{1j})\right]\right\}=7\cdot[1{,}96+1{,}96+2\cdot(48{,}12-7\cdot 7)]$$

$$=15{,}12$$

$$Var(Y)=Var\left(\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{7}Y_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{7}Var(Y_{ij})=4\cdot 7\cdot Var(Y_{ij})=4\cdot 7\cdot 1{,}96=54{,}88$$

$$Var(G)=Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)=15{,}12+54{,}88=70$$

5 1) G $\overset{n>30(ZGS)}{\text{ist approximativ}}$ $N(\mu_G;\sigma_G^2)\sim N(294;70)$

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$

3 2) $$P(G\geq g)=0{,}9032=P\left(\frac{G-\mu_G}{\sigma_G}\geq\frac{g-\mu_G}{\sigma_G}\right)=P\left(V\geq\frac{g-294}{\sqrt{70}}\right)=P\left(V\leq\underbrace{-\frac{g-294}{\sqrt{70}}}_{c=1{,}3}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{g-294}{\sqrt{70}}=1{,}3 \Rightarrow g=-1{,}3\cdot\sqrt{70}+294=\underline{283{,}123}$$

Z : „ Anzahl der übergewichtigen Hamster bei … einfachen … n = 50 “ ; Z ist B (n ; π)

$$\frac{Z}{n} \overset{n\cdot\pi>5\,;\,n\cdot(1-\pi)>5}{\text{ist approximativ}} N\left[\pi;\frac{\pi\cdot(1-\pi)}{n}\right]$$

1 3) $$P\left(N\cdot\left[\frac{Z}{n}-c\cdot\sqrt{\frac{\frac{Z}{n}\cdot\left(1-\frac{Z}{n}\right)}{n}}\right]\leq N\cdot\pi=\delta\leq N\cdot\left[\frac{Z}{n}+c\cdot\sqrt{\frac{\frac{Z}{n}\cdot\left(1-\frac{Z}{n}\right)}{n}}\right]\right)=1-\alpha$$

N = 1000 ; n = 50 ; z = 28 ; 1 – α = 0,99 ⇨ c = 2,58 [c aus N (0 ; 1) , da : 5 ≤ 28 ≤ 45 erfüllt !]

5 4) $$\left[1000\cdot\left\{\frac{28}{50}-2{,}58\cdot\sqrt{\frac{\frac{28}{50}\cdot\left(1-\frac{28}{50}\right)}{50}}\right\};\ 1000\cdot\left\{\frac{28}{50}-2{,}58\cdot\sqrt{\frac{\frac{28}{50}\cdot\left(1-\frac{28}{50}\right)}{50}}\right\}\right]$$

$$=[1000\cdot(0{,}56-2{,}58\cdot 0{,}0702)\ ;\ 1000\cdot(0{,}56+2{,}58\cdot 0{,}0702)]$$
$$=[1000\cdot(0{,}56-0{,}181116)\ ;\ 1000\cdot(0{,}56+0{,}181116)]=[1000\cdot 0{,}378884\ ;\ 1000\cdot 0{,}741116]$$
$$=\underline{[378{,}884\ ;\ 741{,}116]}$$

/25

Matr. Nr. :

Aufgabe MC

A	B	C	D	E
1	1	**1**	1	**1**
2	**2**	**2**	**2**	2
3	**3**	3	3	**3**
4	4	4	**4**	4

■ ≅ **richtig**

Aufgabe MC	Punkte