Aufgabe 1

Vor der Fußball–Weltmeisterschaft 2014 in Brasilien treffen sich Vertreter von Fan–Clubs und Vertreter des Fußball–Verbandes, um über die Zukunft dieser Sportart zu beraten. Insbesondere der Mangel an torreichen Spielen – infolge von defensivem taktischen Verhalten einiger Mannschaften – bereitet beiden Seiten Sorgen. Eine von den Fans vorgeschlagene Lösung des Problems wäre die Abschaffung der Abseitsregel.
Die letzten 16 Spiele der kommenden Weltmeisterschaft (≅ sog. „ KO–Spiele “) sollen als Datenbasis (einfache Stichprobe) genutzt werden, um mit Hilfe eines statistischen Tests ($\alpha = 0{,}1$) zu entscheiden, ob künftig die Abseitsregel abgeschafft oder beibehalten werden soll.
Ein Spiel gelte als langweilig, wenn weniger als 3 Tore im Spiel fallen. Beide Seiten erachten es als wünschenswert, wenn dies in Wahrheit bei mehr als 75 % der Spiele nicht der Fall wäre.
Für die Fan–Vertreter wäre es nahezu eine Katastrophe, einer Beibehaltung der Abseitsregel zuzustimmen, obwohl zu viele Spiele langweilig sind.
Der Verband hingegen wäre nur bereit, einer Abschaffung der Abseitsregel zuzustimmen, wenn sich statistisch nachweisen ließe, dass zu wenige Spiele mindestens drei Tore bieten.

Sei $\pi \cong$ „ Anteil langweiliger Fußballspiele “

1) Wie lautet das hier zu verwendende (parametrische) Testverfahren ?

2) Formulieren Sie die Hypothesen für diesen Test, wenn

   a) die Interessenlage der Fans berücksichtigt werden soll !
   b) die Interessenlage des Verbandes berücksichtigt werden soll !

   Begründen Sie jeweils Ihre Wahl – falls nötig – mit Hilfe einer Risikoüberlegung !

Nach zähen Verhandlungen einigen sich die Parteien auf folgende Hypothesenformulierung :

$$H_0 : \pi \le \pi_0$$
$$H_1 : \pi > \pi_0$$

3) Wie lautet die Testfunktion und wie ist diese unter H_0 verteilt ?
4) Bestimmen Sie den Annahme– und Verwerfungsbereich dieses Tests !
5) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Testentscheidung, falls für den Anteil der Spiele, die nicht langweilig sind, gilt :
   a) 90 % ; b) 20 % ; c) 70 %

6) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für eine falsche Testentscheidung, falls für den Anteil der Spiele, die langweilig sind, gilt :
   a) 20 % ; b) 65 % ; c) 95 %

Angenommen, bei den betrachteten Spielen würden vier Spiele ohne oder mit nur einem Tor, neun Spiele hingegen mit drei oder mehr Toren enden.

7) Wie lautet die Testentscheidung ?
8) Interpretieren Sie das Testergebnis inhaltlich und statistisch exakt ! Wird die Abseitsregel künftig abgeschafft ?
9) Welcher Fehler könnte bei der Testentscheidung unterlaufen sein, und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Testentscheidung falsch ist ?

Aufgabe 2

A

Statistix ist nebenberuflich als Statistik–Experte tätig und möchte dies fortan hauptberuflich ausüben. Um einen Anhaltspunkt zu bekommen, ob er von dieser Tätigkeit finanziell auch leben kann, betrachtet er seine monatlichen Einnahmen und Ausgaben der letzten 36 Monate. Dabei kann er davon ausgehen, dass die Einnahmen dieser Monate untereinander unabhängig sind, die Ausgaben dieser Monate untereinander unabhängig sind und auch zwischen den Einnahmen und den Ausgaben dieser Monate keine Abhängigkeit besteht.

Sei

X_i : „Einnahmen im i–ten Monat" $[i = 1, \ldots, 36]$ mit $E(X_i) = \mu_X$; $Var(X_i) = \sigma_X^2 = 120{,}45$

Y_i : „Ausgaben im i–ten Monat" $[i = 1, \ldots, 36]$ mit $E(Y_i) = \mu_Y$; $Var(Y_i) = \sigma_Y^2 = 45{,}25$

Auf dieser Basis hat er folgende Stichprobenfunktion zum Schätzen von μ_X (≡ durchschnittliche Einnahmen pro Monat) konstruiert :

$$\hat{\Theta}_{\mu_X} = a \cdot \left[\frac{1}{24} \cdot \sum_{i=1}^{24} X_i\right] + (1-a) \cdot \left[\frac{1}{12} \cdot \sum_{i=25}^{36} X_i\right] \quad \text{mit } 0 \le a \le 1$$

1) Zeigen Sie mit Hilfe eines formalen Rechenganges, dass die Funktion $\hat{\Theta}_{\mu_X}$ erwartungstreu ist !

2) Bestimmen Sie [in Abhängigkeit von a] $Var\left(\hat{\Theta}_{\mu_X}\right)$ und zeigen Sie mit Hilfe eines formalen Beweisganges, dass $\hat{\Theta}_{\mu_X}$ für $a = \frac{2}{3}$ am wirksamsten ist !

Hinweis : $\dfrac{dVar\left[\hat{\Theta}_{\mu_X}(a)\right]}{da} = \ldots$

3) Zeigen Sie mit Hilfe eines formalen Rechenganges, dass gilt : $\hat{\Theta}_{\mu_X} = \overline{X}$ für $a = \frac{2}{3}$!

Im nächsten Schritt möchte Statistix den zukünftigen Gewinn der nächsten 12 Monate schätzen. Dabei geht er davon aus, dass durch die hauptberufliche Ausübung seiner Tätigkeit die zukünftigen Ausgaben sich zwar verdoppeln, aber dafür die zukünftigen Einnahmen sich sogar verfünffachen werden.

4) Bestimmen Sie die (erwartungstreue und wirksamste) Schätzfunktion

$$\hat{\Theta}_G = \hat{\Theta}_G(X_1, \ldots, X_{36}, Y_1, \ldots, Y_{36})$$

für den erwarteten zukünftigen Gewinn der nächsten 12 Monate ! **Hinweis** : Gewinn = Einnahmen – Ausgaben

5) Bestimmen Sie $\sigma_G^2 = Var\left(\hat{\Theta}_G\right)$!

6) Wie ist die Schätzfunktion $\hat{\Theta}_G$ verteilt ? [Verteilungstyp und –parameter !]

Angenommen, in den letzten 36 Monaten hätten die durchschnittlichen Einnahmen 998 €/Monat und die durchschnittlichen Ausgaben 329 €/Monat betragen.

7) Bestimmen Sie auf einem Konfidenzniveau von $1 - \alpha = 95{,}45\,\%$ ein (zweiseitig symmetrisches) Schätzintervall für den erwarteten zukünftigen Gewinn μ_G der nächsten 12 Monate !

B

Statistix will mit seiner Freundin Berta in den Urlaub nach Brasilien zur Fußball–Weltmeisterschaft fliegen. Bei der Auswahl der Hotels informiert er sich im Internet, welche Hotels empfehlenswert sind und welche nicht. Berta erkundigt sich lieber im Reisebüro ihres Vertrauens über die zur Auswahl stehenden Hotels. Statistix ist der Auffassung, dass sich die Bewertung der Hotels im Internet und im Reisebüro nicht unterscheidet und will dies mit Hilfe eines statistischen Tests ($\alpha = 5\,\%$) überprüfen. Von den insgesamt 30 betrachteten Hotels wurden 19 vom Reisebüro, aber nur 15 im Internet empfohlen. Sowohl vom Reisebüro als auch im Internet waren 6 Hotels nicht empfehlenswert.

1) Wie lautet das zu verwendende Testverfahren ?

2) Wie lauten die Hypothesen für diesen Test ? Begründen Sie Ihre Wahl – falls nötig – mit Hilfe einer Risikoüberlegung !

3) Wie lautet die Testfunktion für diesen Test, und wie ist diese unter H_0 verteilt ?

4) Bestimmen Sie den Annahme– und Verwerfungsbereich für diesen Test !

5) Wie lautet die Testentscheidung ?

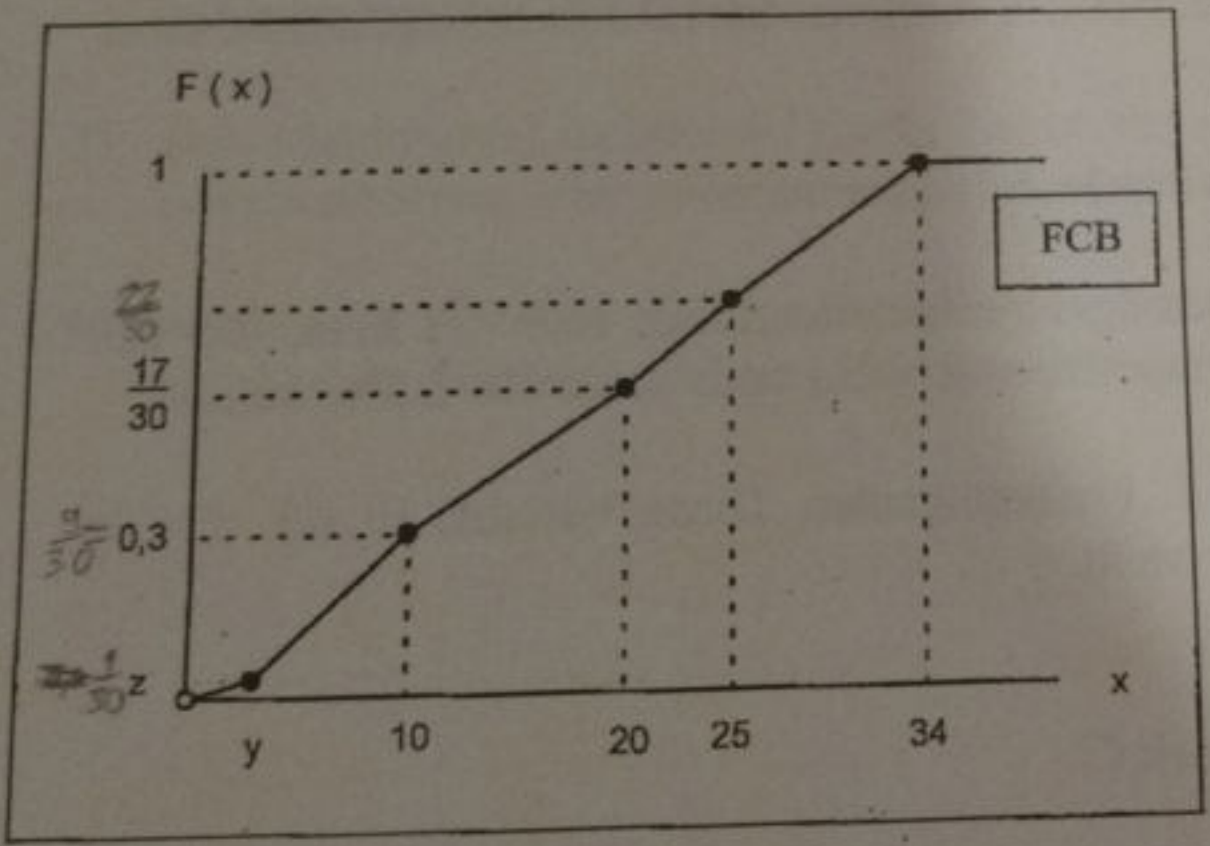
6) Interpretieren Sie das Testergebnis inhaltlich und statistisch exakt !

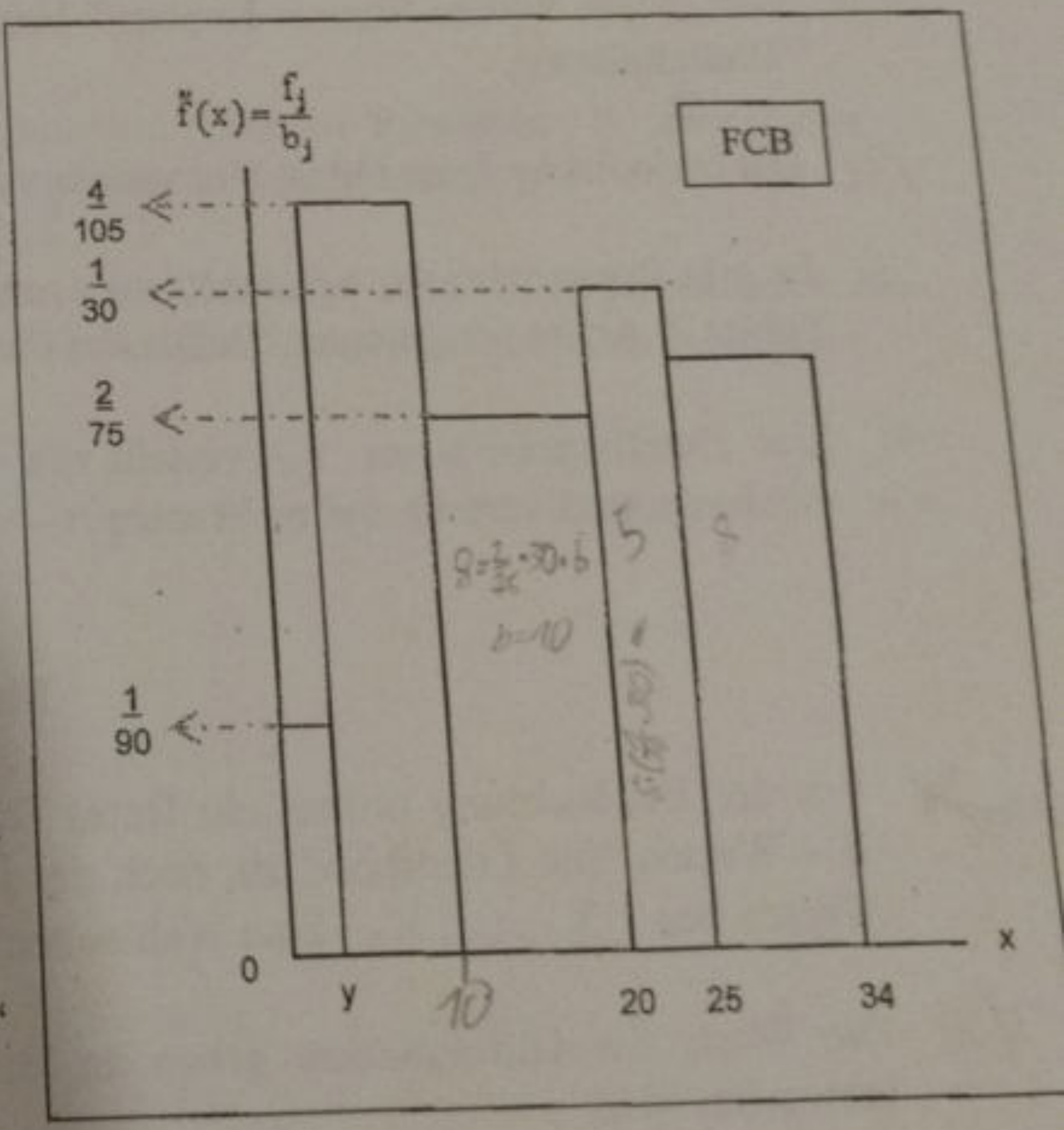
Aufgabe 3

Wegen der Fußballweltmeisterschaft 2014 steigt nicht nur bei den Männern das Interesse für Fußball, sondern auch bei den Frauen. Fritzchen will mit Hilfe eines statistischen Tests ($\alpha = 0{,}05$) untersuchen, ob das Interesse für Fußball bei den weiblichen Anhängern verschiedener Vereine gleichermaßen ausgeprägt ist. Zwecks Datenbeschaffung besucht Fritzchen – nachdem er sich mit einer Packung Kallocks gestärkt hat – das Pokalendspiel zwischen den Vereinen „ FC Bavaria " (FCB) und „ Borussia Hiernase " (BH). Er erfragt von 30 weiblichen Fans (einfache Stichprobe) von „ FC Bavaria " und von 20 weiblichen Fans (einfache Stichprobe) von „ Borussia Hiernase ", wie viele der letzten 34 Spiele ihres Vereins sie aus Interesse besucht haben, um in Weltmeisterschaftsstimmung zu kommen. Als Fan von „ Borussia Hiernase " hat Fritzchen nach dem Gewinn des Pokalendspiels leider beim Feiern aus Versehen Bier über seine Datensammlung geschüttet. Am nächsten Tag sind daher seine Untersuchungsergebnisse für den Verein „ FC Bavaria " nur noch lückenhaft [s. Histogramm und Verteilungsfunktion (FCB)]. Für den Verein „ Borussia Hiernase " kann er sich zumindest daran erinnern, dass sich die absoluten Häufigkeiten nach folgender Quote auf die fünf Gruppen verteilen [(**1. Gruppe**) : ··· : (**5. Gruppe**)] ⇨ **0,5 : 2 : 3 : 1,5 : 3**.

von … bis unter	h_j (FCB)	f_j	$F(x)$	b_j	$\tilde{f}(x) = \frac{f_j}{b_j}$
0 – 3	? 1	1/30	1/30	3	
3 – 10	? 8	8/30	9/30	7	
10 – 20	? 8	8/30	17/30	10	
20 – 25	? 5	5/30	22/30	5	
25 – 34	? 8	8/30	30/30	9	8/270
	n_{FCB} = 30				

h_j (BH)
? 1
? 4
? 6
? 3
? 6
n_{BH} = 20





1) Bestimmen Sie y und z (siehe Histogramm und Verteilungsfunktion des FCB) !
   [**<u>Beachten Sie das „ Prinzip der Flächentreue "</u>**]

2) Ermitteln Sie die absolute Häufigkeitsverteilung „ FCB " sowie die absolute Häufigkeitsverteilung „ BH " !

3) Wie heißt das hier zu verwendende Testverfahren ?

4) Wie lauten die Hypothesen für den Test ?
   Begründen Sie Ihre Wahl – <u>falls nötig</u> – mit Hilfe einer Risikoüberlegung !

5) Wie lautet die Testfunktion, und wie ist diese unter H_0 verteilt ?

6) Bestimmen Sie den Annahme– und Verwerfungsbereich für den Test !

7) Wie lautet die Testentscheidung ?

8) Interpretieren Sie das Testergebnis inhaltlich und statistisch exakt !

Aufgabe MC

Block A

1) Beim Einstichproben–Gaußtest auf μ ist die Wahrscheinlichkeit, den Fehler 2. Art zu begehen, begrenzbar, da der Verteilungstyp der Prüfgröße unter H_1 bekannt ist und der Annahme– und Ablehnbereich nicht vom Stichprobenergebnis abhängen.

2) Das Verfahren der Intervallschätzung liefert Schätzintervalle, in denen der gesuchte Parameter mit $(1-\alpha)$%–iger Wahrscheinlichkeit liegt.

3) Eine Auswahl nach dem proportionalen Schichtungsverfahren ist keine uneingeschränkte Zufallsauswahl, da jede Stichprobe vom Umfang n dieselbe Wahrscheinlichkeit hat realisiert zu werden.

4) Fällt bei einem Parametertest der Wert der Testfunktion in den Ablehnbereich, kann auf keinen Fall ein Fehler 2. Art begangen worden sein.

Block B

1) Das „Mean Square Error – Konzept“ betrachtet den mittleren tatsächlichen Schätzfehler einer Schätzfunktion.

2) Die periodische Auswahl ist eine gleichgewichtete Zufallsauswahl.

3) Es gibt Parametertests, bei denen man neben dem Fehlerrisiko 1. Art auch das Risiko für den Fehler 2. Art an festgelegten Stellen des Parameterbereichs H_1 unter Kontrolle halten kann.

4) Eine Zufallsvariable sei t – verteilt mit f Freiheitsgraden. Diese Variable ist für $f > 30$ standardnormalverteilt und nicht mehr t – verteilt.

Block C

1) Vor der Beobachtung ordnet ein festes Stichprobenergebnis $(x_1, \ldots x_n)$ den möglichen ϑ – Werten eine Likelihood zu, nach der Beobachtung ordnet ein ϑ – Wert den möglichen Werten von $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Wahrscheinlichkeit zu.

2) Die Werte der Gütefunktion geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese verworfen wird.

3) Das (schwache) Gesetz der großen Zahlen besagt, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der $\overline{X}_n$ in ein (beliebig klein) vorgegebenes Intervall $[\mu - c\,;\,\mu + c]$ fällt, mit wachsender Anzahl der Versuche gegen ~~Null~~ konvergiert.
eins

4) Zieht man eine proportional geschichtete Stichprobe, so hat jedes Element der Grundgesamtheit die gleiche Wahrscheinlichkeit, in die Stichprobe zu gelangen.

Block D

1) Bei einem zweiseitigen Test auf π muss die Gütefunktion nicht symmetrisch um π_0 verlaufen.

2) Entscheidet man sich bei einem Chi ^{2} – Anpassungstest für H_1, so ist signifikant untermauert, dass die untersuchte Zufallsvariable keiner Normalverteilung folgt.

3) Eine gleichgewichtete Stichprobe ist immer auch eine uneingeschränkte Stichprobe.
uneingeschränkt => gleichgewichtet (nicht andersrum)

4) Ein „ Niveau – α – Test " heißt **konsistent** , falls mit wachsendem Stichprobenumfang die Ablehnung einer unzutreffenden Nullhypothese immer sicherer wird.

Block E

1) Die Gütefunktion eines statistischen Tests ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion, aber keine Dichtefunktion.

2) Die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung bei einem statistischen Test zum Niveau α kann auch größer sein als α .

3) Das Maximum–Likelihood–Prinzip liefert für einen unbekannten Parameter ϑ zwar keine erwartungstreue, aber stets eine asymptotisch erwartungstreue Schätzfunktion.

4) Wird eine einfache Stichprobe gezogen, haben alle Elemente der Grundgesamtheit eine gleichgroße (und von Null verschiedene) Wahrscheinlichkeit, in die Stichprobe zu gelangen.