Aufgabe 1

1 1) Einseitiger Einstichproben–Test auf π

X_i : „ Anzahl der <u>langweiligen</u> Spiele beim i–ten Spiel “

X_i ist Bernoulli–verteilt mit π

$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$: „ Anzahl der <u>langweiligen</u> Spiele . . . bei . . . einfachen . . . n = 16 “

Y ist $B(n;\pi) \sim B(16;\pi)$

$\frac{Y}{n}$: „ An<u>teil</u> der langweiligen Spiele . . . bei . . . einfachen . . . n = 16 “

2)

a) $H_0 : \pi \geq \pi_0 \; (=0{,}25)$ 1 $\alpha \cong P$ („ Abseitsregel bleibt “ / zu viele Spiele sind langweilig)

1 $H_1 : \pi < \pi_0 \; (=0{,}25)$

3 b) $\mathbf{H_0 : \pi \leq \pi_0 \; (=0{,}25)}$ **keine** Risikoüberlegung ! $\alpha = 0{,}1$

1 $\mathbf{H_1 : \pi > \pi_0 \; (=0{,}25)}$

2 3) $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$: „ An<u>zahl</u> der <u>langweiligen</u> Spiele . . . bei . . . einfachen . . . n = 16 “

Y ist <u>unter H_0</u> ungünstigstenfalls $B(n;\pi_0) \sim B(16;0{,}25)$

2 4) Annber. : $\{ y / y \leq 6 \}$; B : $\{ y / y > 6 \}$; $\alpha_{ex} = 1 - 0{,}9204 = \underline{0{,}0796}$

6 5)

a) $P(\text{„}H_0\text{“} / \pi_1 = 0{,}1 \in H_0) \cong 1 - \alpha(\pi_1 = 0{,}1) = \underline{0{,}9995}$ 2

b) $P(\text{„}H_1\text{“} / \pi_2 = 0{,}8 \in H_1) \cong 1 - \beta(\pi_2 = 0{,}8) = 1 - 0{,}0002 = \underline{0{,}9998}$ 2

c) $P(\text{„}H_1\text{“} / \pi_3 = 0{,}3 \in H_1) \cong 1 - \beta(\pi_3 = 0{,}3) = 1 - 0{,}8247 = \underline{0{,}1753}$ 2

6 6)

a) $P(\text{„}H_1\text{“} / \pi_4 = 0{,}2 \in H_0) \cong \alpha(\pi_4 = 0{,}2) = 1 - 0{,}9733 = \underline{0{,}0267}$ 2

b) $P(\text{„}H_0\text{“} / \pi_5 = 0{,}65 \in H_1) \cong \beta(\pi_5 = 0{,}65) = \underline{0{,}0229}$ 2

c) $P(\text{„}H_0\text{“} / \pi_6 = 0{,}95 \in H_1) \cong \beta(\pi_6 = 0{,}95) = \underline{0}$ 2

1 7) Da $y = 7 \in B \Leftrightarrow$ „H_1“

2 8) Auf . . . α_{ex} = 7,96 % basierend . . . einfachen . . . n = 16 konnte statistisch nachgewiesen werden, dass der w
Anteil der langweiligen Spiele zu hoch ist ! **Ja, Abseitsregel wird abgeschafft !**

2 9) α – Fehler ! **Gibt es nicht**, Testentscheidung ist entweder richtig oder falsch !

25

Aufgabe 2

A

X_i : „Einnahmen im i-ten Monat" $[\, i=1,\dots,36 \,]$ mit $E(X_i)=\mu_X$; $Var(X_i)=\sigma_X^2=120{,}45$

Y_i : „Ausgaben im i-ten Monat" $[\, i=1,\dots,36 \,]$ mit $E(Y_i)=\mu_Y$; $Var(Y_i)=\sigma_Y^2=45{,}25$

$$\hat{\Theta}_{\mu_X}=a\cdot\left[\frac{1}{24}\cdot\sum_{i=1}^{24}X_i\right]+(1-a)\cdot\left[\frac{1}{12}\cdot\sum_{i=25}^{36}X_i\right] \quad \text{mit } 0\le a\le 1$$

1 1) $$E(\hat{\Theta}_{\mu_X})=E\left[a\cdot\left(\frac{1}{24}\cdot\sum_{i=1}^{24}X_i\right)+(1-a)\cdot\left(\frac{1}{12}\cdot\sum_{i=25}^{36}X_i\right)\right]=a\cdot\left[\frac{1}{24}\cdot\sum_{i=1}^{24}E(X_i)\right]+(1-a)\cdot\left[\frac{1}{12}\cdot\sum_{i=25}^{36}E(X_i)\right]$$
$$=a\cdot\left[\frac{1}{24}\cdot 24\cdot\mu_X\right]+(1-a)\cdot\left[\frac{1}{12}\cdot 12\cdot\mu_X\right]=a\cdot\mu_X+(1-a)\cdot\mu_X=\mu_X\cdot(a+1-a)=\underline{\mu_X}$$

3 2) $$Var(\hat{\Theta}_{\mu_X})=Var\left[a\cdot\left(\frac{1}{24}\cdot\sum_{i=1}^{24}X_i\right)+(1-a)\cdot\left(\frac{1}{12}\cdot\sum_{i=25}^{36}X_i\right)\right]=a^2\cdot\left[\frac{1}{24^2}\cdot\sum_{i=1}^{24}Var(X_i)\right]+(1-a)^2\cdot\left[\frac{1}{12^2}\cdot\sum_{i=25}^{36}Var(X_i)\right]$$
$$=a^2\cdot\left[\frac{1}{24^2}\cdot 24\cdot\sigma^2_X\right]+(1-a)^2\cdot\left[\frac{1}{12^2}\cdot 12\cdot\sigma^2_X\right]=\frac{a^2}{24}\cdot\sigma^2_X+\frac{(1-a)^2}{12}\cdot\sigma^2_X=\sigma^2_X\cdot\frac{a^2+2\cdot(1-a)^2}{24}$$
$$=\sigma^2_X\cdot\frac{a^2+2\cdot(1-2\cdot a+a^2)}{24}=\underline{\sigma^2_X\cdot\frac{3\cdot a^2-4\cdot a+2}{24}}$$

$$\frac{dVar\left[\hat{\Theta}_{\mu_X}(a)\right]}{da}=\frac{\sigma^2_X}{24}\cdot 6\cdot a-\frac{\sigma^2_X}{24}\cdot 4+0\overset{!}{=}0 \rightarrow \frac{\sigma^2_X}{24}\cdot(6\cdot a-4)=0 \rightarrow 6\cdot a=4 \rightarrow \underline{a=\frac{2}{3}}$$

1 3) $$\hat{\Theta}_{\mu_X}=a\cdot\left[\frac{1}{24}\cdot\sum_{i=1}^{24}X_i\right]+(1-a)\cdot\left[\frac{1}{12}\cdot\sum_{i=25}^{36}X_i\right]=\frac{2}{3}\cdot\left[\frac{1}{24}\cdot\sum_{i=1}^{24}X_i\right]+\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{12}\cdot\sum_{i=25}^{36}X_i\right]$$
$$=\frac{1}{36}\cdot\sum_{i=1}^{24}X_i+\frac{1}{36}\cdot\sum_{i=25}^{36}X_i=\frac{1}{36}\cdot\sum_{i=1}^{36}X_i=\underline{\bar{X}}$$

4 4) $$\hat{\Theta}_G=12\cdot 5\cdot\frac{1}{36}\cdot\sum_{i=1}^{36}X_i-12\cdot 2\cdot\frac{1}{36}\cdot\sum_{i=1}^{36}Y_i=\underline{\frac{5}{3}\cdot\sum_{i=1}^{36}X_i-\frac{2}{3}\cdot\sum_{i=1}^{36}Y_i}$$

3 5) $$Var(\hat{\Theta}_G)=Var\left(\frac{5}{3}\cdot\sum_{i=1}^{36}X_i-\frac{2}{3}\cdot\sum_{i=1}^{36}Y_i\right)=\frac{25}{9}\cdot\sum_{i=1}^{36}Var(X_i)+\frac{4}{9}\cdot\sum_{i=1}^{36}Var(Y_i)=\frac{25}{9}\cdot 36\cdot\sigma^2_X+\frac{4}{9}\cdot 36\cdot\sigma^2_Y$$
$$=100\cdot\sigma^2_X+16\cdot\sigma^2_Y=100\cdot 120{,}45+16\cdot 45{,}25=12045+724=\underline{12769=113^2}$$

1 6) $\hat{\Theta}_G$ ist approximativ $N(\mu_G\,;\sigma^2_G)\overset{n>30(ZGS)}{\sim}N(\mu_G\,;113^2)$

$1-\alpha=0{,}9545$; $1-\alpha=0{,}9545 \Leftrightarrow c=2$

2 $$P(\hat{\Theta}_G-c\cdot\sigma_G\le\mu_G\le\hat{\Theta}_G+c\cdot\sigma_G)=1-\alpha=0{,}9545$$

$$\hat{\vartheta}_G=\frac{5}{3}\cdot 36\cdot 998-\frac{2}{3}\cdot 36\cdot 329=59880-7896=\underline{51984}$$

7) $$\left[\hat{\vartheta}_G-c\cdot\sigma_G\,;\,\hat{\vartheta}_G+c\cdot\sigma_G\right]=[\,51984-2\cdot 113\,;\,51984+2\cdot 113\,]=\underline{[\,51758\,;\,52210\,]}$$

B

X : „ Bewertung der Hotels im **Internet** " ; Y : „ Bewertung der Hotels im **Reisebüro** "

1   1) McNemar – Test für abhängige Stichproben

Y / X	*positiv*	*negativ*	
positiv	10	5 / $\tilde{b} = 7$	15
negativ	9 / $\tilde{c} = 7$	6	15
	19	11	n = 30

1   2) H_0 : Bewertungen sind identisch $[\pi_X = \pi_Y]$
H_1 : Bewertungen sind **nicht** identisch $[\pi_X \neq \pi_Y]$

1   3) $V = \frac{(b-c)^2}{b+c}$ ist **unter H_0** approximativ $\quad \tilde{b} = \tilde{c} = \frac{b+c}{2} \geq 5$

χ^2 – verteilt mit $f = 1$; $c_{[\alpha = 0{,}05\,;\,f=1]} = \mathbf{3{,}84}$

2   4) Annahmeber. : $\{ v \,/\, v \leq \mathbf{3{,}84} \}$; B : $\{ v \,/\, v > \mathbf{3{,}84} \}$

$$v = \frac{(5-9)^2}{5+9} = \frac{16}{14} = \underline{1{,}143}$$

3   5) Da $v = 1{,}143 \notin B \Rightarrow$ „ $\mathbf{H_0}$ "

2   6) Basierend auf einer (zweidim.) verbundenen Stichprobe vom Umfang n = 30 und einem Signifikanzniveau von 5 % konnte statistisch **nicht** nachgewiesen werden, dass sich die Hotelbewertungen im Internet von denen im Reisebüro unterscheiden !
Statistix Auffassung wird somit zumindest nicht widerlegt !

25

Aufgabe 3

X : „Anzahl der besuchten Fußballspiele des jeweiligen Vereins in der letzten Saison (≙ 34 Spiele)"

von … bis unter	h_j (FCB)	f_j	F (x)	b_j	$\tilde{f}(x) = \frac{f_j}{b_j}$
0 – 3	1	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	3	$\frac{1}{90}$
3 – 10	8	$\frac{8}{30}$	$\frac{9}{30}$	7	$\frac{4}{105}$
10 – 20	8	$\frac{8}{30}$	$\frac{17}{30}$	10	$\frac{2}{75}$
20 – 25	5	$\frac{5}{30}$	$\frac{22}{30}$	5	$\frac{1}{30}$
25 – 34	8	$\frac{8}{30}$	1	9	$\frac{4}{135}$
	$n_{FCB} = 30$				

h_j (BH)
1
4
6
3
6
$n_{BH} = 20$

4

2

4

2

/25

1) $z = f_1$; $y = b_1$

6

$$\left[\frac{f_1}{b_1} = \right] \frac{z}{y} = \frac{1}{90} \Rightarrow z = \frac{y}{90} \quad ; \quad \left[\frac{f_2}{b_2} = \right] \frac{\frac{3}{10} - z}{10 - y} = \frac{4}{105}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{10} - \frac{y}{90}}{10 - y} = \frac{4}{105} \Rightarrow \frac{27 - y}{90} = \frac{40 - 4 \cdot y}{105} \Rightarrow (27 - y) \cdot 105 = (40 - 4 \cdot y) \cdot 90$$

5

$$\Rightarrow 2835 - 105 \cdot y = 3600 - 360 \cdot y \Rightarrow 255 \cdot y = 765 \Rightarrow \underline{y = 3} \text{ und } \underline{z = \frac{1}{30}}$$

2) s. Tabelle

1 3) χ^2 – Homogenitätstest

1 4) H_0 : Beide Stichproben stammen aus derselben Ggh $[\pi_{i\,FCB} = \pi_{i\,BH} = \pi_i]$

H_1 : Beide Stichproben stammen **nicht** aus derselben Ggh $[\pi_{i\,FCB} \neq \pi_{i\,BH}]$

	FCB	BH	
0 – 3	**1,2** 1	**0,8** 1	2
3 – 10	**7,2** 8	**4,8** 4	12
10 – 20	**8,4** 8	**5,6** 6	14
20 – 25	**4,8** 5	**3,2** 3	8
25 – 34	**8,4** 8	**5,6** 6	14
	$n_{FCB} = 30$	$n_{BH} = 20$	n = 50

$\tilde{h}_{ij} \geq 1 \; \forall$ Zellen und $\tilde{h}_{ij} \geq 5$ für mind. 80 % der Zellen **nicht erfüllt !**
Daher muss die 1. & 2. Kategorie sowie die 4. & 5. Kategorie <u>oder</u> 4. & 3. Kategorie zusammengelegt werden !

4. & 5.

	FCB	BH	
0 – 10	**8,4** 9	**5,6** 5	14
10 – 20	**8,4** 8	**5,6** 6	14
20 – 34	**13,2** 13	**8,8** 9	22
	$n_{FCB} = 30$	$n_{BH} = 20$	n = 50

4. & 3.

	FCB	BH	
0 – 10	**8,4** 9	**5,6** 5	14
10 – 25	**13,2** 13	**8,8** 9	22
25 – 34	**8,4** 8	**5,6** 6	14
	$n_{FCB} = 30$	$n_{BH} = 20$	n = 50

$\tilde{h}_{ij} \geq 1 \ \forall$ Zellen ; $\tilde{h}_{ij} \geq 5$ für mind. 80 % der Zellen

4

5) $V = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \frac{\left(h_{ij} - \tilde{h}_{ij}\right)^2}{\tilde{h}_{ij}}$ ist **unter H $_0$** approximativ χ^2 – verteilt mit $f = (I-1)(J-1) = (3-1)(2-1) = 2$

$c_{[\alpha = 0{,}05\,;\, f = 2]} = 5{,}99$

2

6) Annahmeber. : $\{ v / v \leq 5{,}99 \}$; B : $\{ v / v > 5{,}99 \}$

$\boxed{\text{4. \& 3.}}$

4

$$v = \frac{(9-8{,}4)^2}{8{,}4} + \frac{(5-5{,}6)^2}{5{,}6} + \frac{(13-13{,}2)^2}{13{,}2} + \frac{(9-8{,}8)^2}{8{,}8} + \frac{(8-8{,}4)^2}{8{,}4} + \frac{(6-5{,}6)^2}{5{,}6} = \underline{0{,}1623376}$$

7) Da $v = 0{,}1623376 \notin B \Rightarrow$ „**H $_0$**“

8) Basierend auf zwei jeweils einfachen und untereinander unabhängigen Stichproben vom Umfang $n_{FCB} = 30$ bzw. $n_{BH} = 20$ und einem Signifikanzniveau von 5 % konnte statistisch **<u>nicht</u>** nachgewiesen werden, dass ein signifikanter Unterschied zwischen den weiblichen Fans von FCB und den weiblichen Fans von BH hinsichtlich des Interesses für Fußball besteht.

2

/25

Matr. Nr. :

Aufgabe MC

A	B	C	D	E
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

■ ≡ **richtig**

Aufgabe MC	Punkte