Aufgabe 1

Im Restaurant „ Ali Baba " arbeiten täglich in der Küche dieselben drei Köche. An der Zubereitung eines Essens, das für 10 € verkauft wird, arbeiten stets alle drei Köche gemeinsam. Sie benötigen für ein solches Essen durchschnittlich 12 Minuten und arbeiten ohne Pause, d.h. sobald ein Essen fertig ist, beginnen sie sogleich mit der Zubereitung des nächsten Essens. Um die Zubereitungszeit zu verringern, wurde ein weiterer Koch eingestellt, und zwar zum gleichen Stundenlohn von 10 €, den jeder der drei anderen Köche auch erhält.

Der Restaurantbesitzer Ali möchte nun das Sprichwort „ Viele Köche verderben den Brei " widerlegen, d.h. er will versuchen, mit Hilfe eines statistischen Tests ($\alpha = 1\ \%$) statistisch nachzuweisen, dass der durchschnittliche Gewinn pro Stunde (≡ Differenz zwischen den durchschnittlichen Verkaufseinnahmen pro Stunde und den Lohnkosten pro Stunde) durch die Einstellung des neuen Kochs gestiegen ist. Falls dieser statistische Nachweis nicht gelingen sollte, will Ali den neuen Koch wieder entlassen.

Man kann davon ausgehen, dass die Zubereitungszeit für ein solches Essen annähernd normalverteilt ist mit einer Standardabweichung von 2 Minuten und dass die Zubereitungszeiten dieser Essen untereinander unabhängig sind. Um Daten für die Testdurchführung zu erhalten, sollen Alis drei Neffen (Anton, Bert und Claus) insgesamt 16 mal beobachten, wie lange die Zubereitung eines solchen Essens dauert (einfache Stichprobe).

1) Wie heißt das hier zu verwendende (parametrische) Testverfahren ?

2) Zeigen Sie mit Hilfe eines formalen Rechenganges, dass die Hypothesen des hier durchzuführenden Tests bezüglich des Sollwertes μ_0 der durchschnittlichen Zubereitungszeit für die vier Köche folgendermaßen lauten müssen, d.h. dass gilt: $\mu_0 \overset{!}{=} 10$

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \left(\overset{!}{=} 10 \right)$$
$$H_1 : \mu < \mu_0 \left(\overset{!}{=} 10 \right)$$

3) Führen Sie die Risikoüberlegung durch, die dieser Hypothesenwahl zugrunde liegt !

4) Welche Interessenlage (die von Ali oder die vom neuen Koch) wird durch die Hypothesenwahl begünstigt ?

5) Wie lautet die Prüfgröße für diesen Test (formal und verbal), und wie ist diese unter H_0 verteilt ?

6) Wie lautet die Testfunktion, und wie ist diese unter H_0 verteilt ?

7) Bestimmen Sie den Annahme– und Verwerfungsbereich für diesen Test !

8) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung bei diesem Test, falls die wahre durchschnittliche Zubereitungszeit eines solchen Essens
   a) 8,835
   b) 9
   c) 10
   d) 10,2 Minuten beträgt ?

9) Wie groß müsste der Stichprobenumfang n mindestens gewählt werden, damit die unter **8 b)** berechnete Wahrscheinlichkeit (unter sonst gleichen Bedingungen) 15 % beträgt ?

Die Beobachtung der Neffen brachte folgendes Ergebnis :

Anton :	6 Min	9 Min	11 Min	8 Min	12 Min
Bert :	$n_B = 5$	$\bar{x}_B = 9$ Min	$s_B = 1{,}8$ Min		
Claus :	$n_C = 6$	$\bar{x}_C = 11$ Min	$s_C = 1{,}2$ Min		

10) Wie lautet die Testentscheidung ?

11) Interpretieren Sie das Testergebnis inhaltlich und statistisch exakt ! Wird der neue Koch wieder entlassen ?

12) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die getroffene Testentscheidung falsch ist ?

13) Würde sich an der Entscheidung, ob der neue Koch wieder entlassen wird, etwas ändern, wenn man die Hypothesen umdrehen würde ?

Ökonomen & Wirtschaftsingenieure

Aufgabe 2

A

Ein Statistik-Dozent an der TUB weiß aus Erfahrung, dass während seiner wöchentlichen Vorlesung Handys von Studenten unabhängig voneinander klingeln und dass in seiner Vorlesungszeit zwischen 10 : 15 Uhr und 11 : 45 Uhr durchschnittlich zweimal ein Handy klingelt. Heute findet die letzte Vorlesung statt.

1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb der ersten 45 Minuten der Vorlesung
   a) mindestens zweimal ein Handy klingelt ?
   b) genau 3 Handys klingeln ?

Sei

T : „ Wartezeit bis zum ersten (nächsten) Handyklingeln "

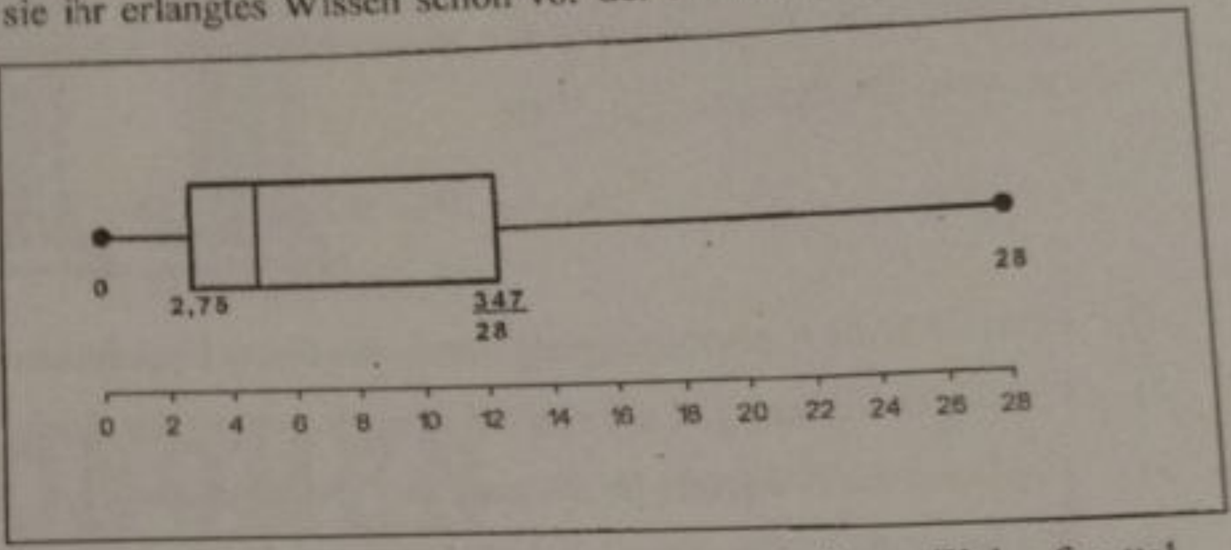
2) Wie ist die Zufallsvariable T verteilt [Verteilungstyp und -parameter !]
3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst nach 11 : 30 Uhr zum ersten Mal ein Handy klingelt ?

Bis 11 : 15 Uhr hat noch kein Handy geklingelt. Der Dozent beschließt, nach der Vorlesung einen Hinweis zur Klausur zu geben, allerdings nur dann, wenn er in der verbleibenden Vorlesungszeit nicht durch ein klingelndes Handy gestört wird.

4) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Studenten vom Dozenten keinen Hinweis zur Klausur bekommen ?

B

Berta ist begeisterte Hörerin dieser Vorlesung. Da sie ihr erlangtes Wissen schon vor der Klausur anwenden möchte, will sie einen statistischen Test ($\alpha = 5$ %) durchführen, ob sich die Vorbereitungszeit (in Tagen) auf die kommende Klausur von den weiblichen und männlichen Hörern dieser Vorlesung signifikant unterscheidet. Aus ihrer Umfrage im Uni-Forum, an der 40 Studenten teilnahmen, hat sie die Daten für die Männer (einfache Stichprobe) gruppiert ausgewertet. Aus der gruppierten Datenverteilung der Frauen (einfache Stichprobe) hat sie folgenden Box-Plot erstellt :



Leider hat sie danach die Datenverteilung der Frauen nach ihrem gestrigen Einkauf zusammen mit ihrem Einkaufszettel vernichtet und erinnert sich nur noch lückenhaft an einige Ergebnisse :

von ... bis unter	h_j (Frauen)	f_j	F (x)	b_j	m_j
0 - 2	? 4	0,16	0,16	2	1
2 - 5	? 6	0,36	0,52	3	3,5
5 - 14	? 7	0,28	0,8	9	9,5
14 - 21	? 3	0,12	0,92	7	17,5
21 - 28	? 2	0,08	1,0	7	24,5
	n_F = 25				

h_j (Frauen)	h_j (Männer)	
? 4	2	6
? 6	1	7
? 7	7	14
? 3	4	7
? 2	1	3
n_F = 25	n_M = 15	

1) Helfen Sie Berta, die gesamte Datenverteilung der Frauen zu rekonstruieren, d.h. bestimmen Sie
   a) $\mathbf{b_2}$
   b) $\mathbf{f_3}$,

   damit der geplante Test durchgeführt werden kann !

Hilfe : $x_p = g_{j-1} + \left[p - F(g_{j-1})\right] \cdot \frac{b_j}{f_j}$

2) Wie heißt das hier zu verwendende Testverfahren ?
3) Wie lauten die Hypothesen für den Test ?
   Begründen Sie Ihre Wahl – falls nötig – mit Hilfe einer Risikoüberlegung !
4) Wie lautet die Testfunktion, und wie ist diese unter H_0 verteilt ?
5) Bestimmen Sie den Annahme- und Verwerfungsbereich für den Test !
6) Wie lautet die Testentscheidung ?
7) Interpretieren Sie das Testergebnis inhaltlich und statistisch exakt !

Aufgabe 3

A

Statistix ist ein fähiger Student, nur leider ist er am Abend vor Klausuren immer sehr aufgeregt und kann nicht einschlafen. Er hat es sich zur Gewohnheit gemacht, an solchen Abenden zur Beruhigung Bier zu trinken. Trinkt Statistix dabei weniger als 0,25 Liter Bier, kann er nur schlecht schlafen, ist auf Grund des Schlafmangels unkonzentriert und besteht die Klausur nicht. Trinkt er jedoch mehr als 4,25 Liter Bier, ist er in der Klausur noch benebelt vom Restalkohol, verrechnet sich oft und besteht die Klausur ebenfalls nicht. In allen anderen Fällen besteht er die Klausur.
Sei

X : „ Von Statistix getrunkene Biermenge am Vorabend einer Klausur [in Liter] "

mit $E(X) = 2{,}25$ [Liter] und $Var(X) = \frac{9}{16}\left[\text{Liter}^2\right]$.

1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Statistix die Klausur am nächsten Tag nicht besteht ?

Statistix Mitbewohnerin Statista geht davon aus, dass gilt : X ist $N\left(2{,}5 ; \frac{9}{16}\right)$

2) Wie groß ist auf (Grund ihrer Annahme) die Wahrscheinlichkeit, dass Statistix die Klausur am nächsten Tag nicht besteht ?

B

Völlig erschöpft von seiner Klausur beschließt Statistix, sich in einem Automatencasino beim Glücksspiel vom Prüfungsstress abzulenken. Die angebotenen Spiele bestehen aus je zwei Spielrunden. Dabei gewinnt man (unabhängig von Spiel und Spielrunde) eine Spielrunde mit der Wahrscheinlichkeit π . Pro gewonnener Spielrunde erhält man einen Gewinn von 1,5 € .
Da Statistix begeistert von der Maximum–Likelihood–Methode ist, möchte er den unbekannten Parameter $\vartheta = 2 \cdot 1{,}5 \cdot \pi$ mit dieser Methode schätzen. Dabei fasst er die nächsten n Spiele (mit $N = 2 \cdot n$ Spielrunden) als einfache Stichprobe auf.
Sei

V : „ Anzahl der Spiele mit genau zwei verlorenen Spielrunden bei n Spielen "
E : „ Anzahl der Spiele mit genau einer verlorenen Spielrunde bei n Spielen "
Z : „ Anzahl der Spiele mit genau zwei gewonnenen Spielrunden bei n Spielen "

X_i : „ Anzahl der gewonnenen Spielrunden beim i–ten Spiel "

1) Interpretieren Sie den Parameter ϑ inhaltlich !

2) Bestimmen Sie tabellarisch (in Abhängigkeit von π) die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_i !

> **Hinweis :**
> Multiplizieren Sie Terme folgender Art nicht aus :
> $(a-b)^2$ bzw. $a \cdot (1-a)$

3) Zeigen Sie mit Hilfe eines formalen Rechenganges, dass sich als Maximum–Likelihood–Schätzfunktion für den unbekannten Parameter π die Funktion $\hat{\Theta}_{ML} = \frac{E + 2 \cdot Z}{2 \cdot n}$ ergibt, d.h.

   a) Stellen Sie die Maximum–Likelihood–Funktion $L[\pi \mid (x_1, \ldots, x_n)]$ auf !

   b) Stellen Sie die logarithmierte Maximum–Likelihood–Funktion $\ln L[\pi \mid (x_1, \ldots, x_n)]$ auf !

   c) Ermitteln Sie allgemein den Maximum–Likelihood–Schätzwert für π !

   d) Wie lautet demnach allgemein der Maximum–Likelihood–Schätzwert für ϑ ?

Nach 20 Spielen hat Statistix bei 17 Spielen weder die erste noch die zweite Spielrunde gewonnen, bei einem Spiel hat er jedoch sogar beide Spielrunden gewonnen.

4) Bestimmen Sie auf Basis dieses Stichprobenergebnisses den Maximum–Likelihood–Schätzwert $\hat{\vartheta}$ für den unbekannten Parameter ϑ !

Aufgabe MC

Block A

1) Ein Test heißt „ Niveau – α – Test “, falls gilt : $g(\vartheta) \leq \alpha$ für alle $\vartheta \in H_1$.

nur bei einseitig

2) Die Gütefunktion eines Einstichproben–Gaußtests auf μ ist in ihrem gesamten Verlauf entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend.

3) Erhöht man beim Einstichproben–Gaußtest (unter sonst gleichen Bedingungen) den Stichprobenumfang n auf n^* , so gilt für die entsprechenden Verwerfungsbereiche B bzw. B^* : $B \subseteq B^*$.

4) Wenn die Anzahl von Ereignissen poissonverteilt ist, dann hängt die Wartezeit auf das Eintreten des nächsten Ereignisses nicht davon ab, wie lange man bereits gewartet hat.

Block B

1) Der einseitige Einstichproben – Gaußtest auf μ ist (unter sonst gleichen Bedingungen) stets trennschärfer als der zweiseitige Einstichproben – Gaußtest auf μ .

2) Die Zufallsvariable X : „ Wartezeit auf den Autobus [in Min.] “ sei stetig gleichverteilt in $[0 ; 10]$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, länger als t Minuten $\{ t \in [0 ; 10] \}$ auf den Bus zu warten, kleiner als die Wahrscheinlichkeit, mindestens t Minuten auf den Bus zu warten.

3) Beim Quotenverfahren darf die Auswahl aus den einzelnen Schichten aufs Geratewohl erfolgen.

4) Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen ist das arithmetische Mittel aus allen realisierten Ausprägungen.

Block C

1) Aufgrund des Zentralen Grenzwertsatzes ist die Summe von Zufallsvariablen erst ab einer bestimmten Mindestanzahl ($n > 30$) von Zufallsvariablen normalverteilt.

2) Die Maximum–Likelihood–Methode ist der Methode der kleinsten Quadrate vorzuziehen, da die ML–Methode die Plausibilität, dass ein Parameter ϑ tatsächlich der unbekannte Parameter der Grundgesamtheit ist, maximiert, während die KQ–Methode diese Plausibilität minimiert.

3) Linearkombinationen von unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen sind stets wiederum normalverteilt.

4) Die Länge eines zweiseitigen, symmetrischen Schätzintervalls für μ kann bei festem Konfidenzniveau und bekanntem σ^2 nur durch die Veränderung des Stichprobenumfangs n beeinflusst werden.

Block D

1) Eine erwartungstreue Schätzfunktion $\hat{\Theta}$ kann bei jeder konkreten Schätzung einen Schätzwert $\hat{\vartheta}$ liefern, der gleich dem zu schätzenden Parameter ϑ ist.

× 2) Um mit Hilfe des Vorzeichentests den unbekannten Median einer Verteilung zu testen, setzt man voraus, dass das untersuchte Merkmal diskret verteilt ist.

3) Wenn das arithmetische Mittel $\bar{x}$ der Stichprobe bekannt ist, lässt sich die Wahrscheinlichkeit dafür angeben, dass das arithmetische Mittel der Grundgesamtheit gleich $\bar{x}$ ist.

4) Der Wert der Gütefunktion eines Tests an der Stelle $\vartheta \in H_1$ ist nicht das Komplement der Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art an der Stelle ϑ .

Block E

√ 1) Die Stichprobenfunktion Y : „ Anzahl der Erfolge bei n unabhängigen Versuchen " sei binomialverteilt. Die Stichprobenfunktion $\frac{Y}{n}$ ist jedoch nicht binomialverteilt.

2) Der Wertebereich einer stetigen Zufallsvariablen kann keine negativen Werte annehmen.

√ 3) Eine Stichprobenfunktion heißt konsistent, falls mit wachsendem Stichprobenumfang ihre Varianz gegen Null konvergiert.

√ 4) Die Klumpenstichprobe als Spezialfall eines zweistufigen Auswahlverfahrens lässt sich folgendermaßen charakterisieren : Teilerhebung beim 1. Auswahlvorgang und Vollerhebung beim 2. Auswahlvorgang.