unter 10 Minut

1 12) Die Testentscheid
Eine Wahrschein

1 13) Ja ! Der neue K

1 /25

Aufgabe 1

X : „ Zubereitungszeit eines solchen Essens [in Min] " ; X ist $N(\mu;\sigma^2) \sim N(\mu;4)$; $\alpha = 0{,}01$

1 1) Einseitiger Einstichproben–Gaußtest auf μ $\quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\begin{array}{l} H_0: \mu \geq \mu_0\ (=10) \\ H_1: \mu < \mu_0\ (=10) \end{array}}$

3 2) $\frac{60}{12}\cdot 10 - 3\cdot 10 = \frac{60}{\mu_0}\cdot 10 - 4\cdot 10 \Rightarrow 50 - 30 = \frac{600}{\mu_0} - 40 \Rightarrow 60 = \frac{600}{\mu_0} \Rightarrow \mu_0 = 10$

1 3) $\alpha \cong P$ („ Neuer Koch wird weiterbeschäftigt " / Gewinn gesunken)

1 4) Im Interesse von Ali

2 5) $\overline{X}$: „ ∅ Zubereitungszeit eines solchen Essens mit dem neuen Koch bei . . . einfachen . . . n = 16 "

$\overline{X}$ ist unter H_0 ungünstigstenfalls $N\left(\mu_0;\frac{\sigma^2}{n}\right) \sim N\left(10;\frac{4}{16}\right) \sim N(\underbrace{10;0{,}25}_{})$ 1 1

6) $V = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ist unter H_0 $N(0;1)$

1

7) Annahmeber. : $\left\{\overline{x} \,\middle|\, \overline{x} \geq \underbrace{\mu_0 - c\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{8{,}835}\right\}$ und B: $\left\{\overline{x} \,\middle|\, \overline{x} < \underbrace{\mu_0 - c\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{8{,}835}\right\}$

1 bzw. Ann.ber. : $\{ v \mid v \geq -c \}$ und B : $\{ v \mid v < -c \}$ mit $c = 2{,}33$

8)

a) $P("H_0"/\mu_1 = 8{,}835 \in H_1) \equiv \beta_{(\mu 1 = 8{,}835)} = P(\overline{X} \geq 8{,}83\cancel{8}\,5 / \mu_1 = 8{,}835 \in H_1) = P\left(V \geq \frac{8{,}835-8{,}835}{0{,}5}\right)$

$= P(V \geq 0) = \underline{0{,}5}$ 1

b) $P("H_0"/\mu_2 = 9 \in H_1) \equiv \beta_{(\mu 2 = 9)} = P(\overline{X} \geq 8{,}838 / \mu_2 = 9 \in H_1) = P\left(V \geq \frac{8{,}835-9}{0{,}5}\right)$

5 $= P(V \geq -0{,}33) = \underline{0{,}6293}$ 1

c) $P("H_1"/\mu_3 = 10 \in H_0) \equiv \alpha_{(\mu_3 = 10)} = 0{,}01$ 1

d) $P("H_1"/\mu_4 = 10{,}2 \in H_0) \equiv \alpha_{(\mu_4 = 10{,}2)} = P(\overline{X} < 8{,}835 / \mu_4 = 10{,}2 \in H_0) = P\left(V < \frac{8{,}835-10{,}2}{0{,}5}\right)$ 2

$= P(V < -2{,}73) = P(V > +2{,}73) = 1 - P(V \leq +2{,}73) = 1 - 0{,}996833 = \underline{0{,}003167}$

9) $P("H_0"/\mu_2 = 9 \in H_1) \equiv \beta_{(\mu 2 = 9)} \overset{!}{=} 0{,}15$

$\Rightarrow P\left(\overline{X} \geq \mu_0 + c\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} / \mu_2 = 9 \in H_1\right) \overset{!}{=} 0{,}15$

$\Rightarrow P\left(V \geq \underbrace{\frac{10 - \underbrace{2{,}33}_{c_\alpha}\cdot\frac{2}{\sqrt{n}} - 9}{\frac{2}{\sqrt{n}}}}_{c_\beta}\right) \overset{!}{=} 0{,}15 \Rightarrow P(V \geq c_\beta) \overset{!}{=} 0{,}15 \Rightarrow \underline{c_\beta = 1{,}04}$

4 $\Rightarrow \frac{10 - 2{,}33\cdot\frac{2}{\sqrt{n}} - 9}{\frac{2}{\sqrt{n}}} = 1{,}04 \Rightarrow 1 - \frac{4{,}66}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}08}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = \frac{2{,}08 + 4{,}66}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 6{,}74 \Rightarrow n = 45{,}4276 \Rightarrow \underline{n \geq 46}$

Anton :	6 Min	9 Min	11 Min	8 Min	12 Min
Bert :	$n_B = 5$	$\overline{x}_B = 9$ Min	$s_B = 1{,}8$ Min		
Claus :	$n_C = 6$	$\overline{x}_C = 11$ Min	$s_C = 1{,}2$ Min		

$\overline{x} = \frac{6+9+11+8+12+5\cdot 9+6\cdot 11}{16} = \frac{157}{16} = \underline{9{,}8125}$ 2

3 10) Da $\overline{X} = 9{,}8125 \notin B \Leftrightarrow$ „ H_0 " 1

1 11) Auf einem Signifikanzniveau von 1 % basierend auf einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 16$ konnte statistisch **nicht** nachgewiesen werden, dass die wahre unbekannte mittlere Zubereitungszeit eines solchen Essens unter 10 Minuten liegt, d.h. Ali wird den neuen Koch wieder entlassen !

1 12) Die Testentscheidung ist entweder richtig oder falsch (der liebe Gott wird´s wissen) ! Eine Wahrscheinlichkeit für (Test–) Ergebnisse gibt es nicht !

1 13) **Ja !** Der neue Koch dürfte weiterkochen !

/25

Aufgabe 2

A

X : „ Anzahl der klingelnden Handys [in 45 Minuten] " ; X ist $P(\lambda) \sim P(1)$

1)

2 a) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0{,}7358 = \underline{0{,}2642}$ 1

b) $P(X = 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = 0{,}9810 - 0{,}9197 = \underline{0{,}0613}$ 1

T : „ Wartezeit bis zum ersten (nächsten) Handyklingeln "

1 2) T ist $E(\lambda) \sim E(1)$

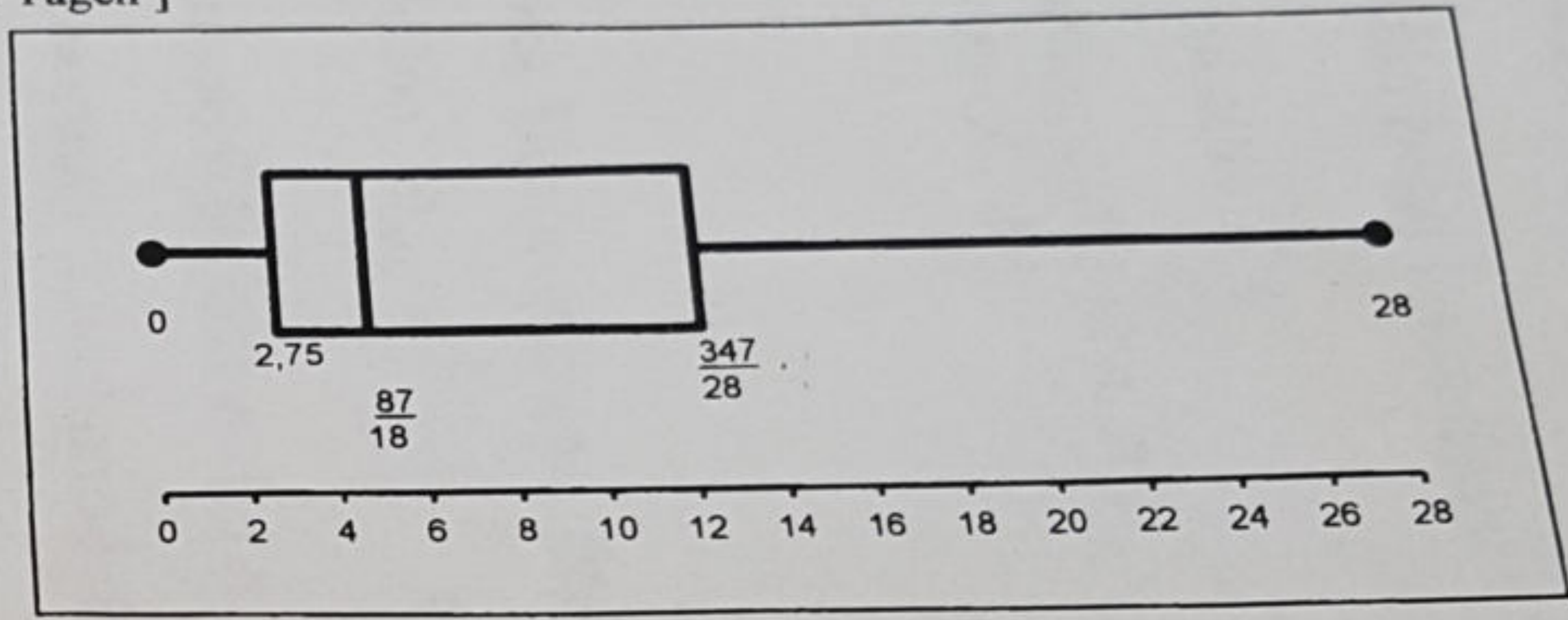
1 3) $P\left(T > \frac{75}{45}\right) = e^{-\lambda \cdot t} = e^{-1 \cdot \frac{75}{45}} = e^{-1{,}666} = \underline{0{,}1888756}$

2 4) $P\left(T \leq \frac{30}{45} + \frac{60}{45} / T > \frac{60}{45}\right) = P\left(T \leq \frac{30}{45}\right) = 1 - e^{-1 \cdot \frac{30}{45}} = 1 - e^{-0{,}666} = 1 - 0{,}5134 = \underline{0{,}4866}$

B

X : „ Vorbereitungszeit von Frauen bzw. Männern [in Tagen] "

Hilfe : $x_p = g_{j-1} + \left[p - F\left(g_{j-1}\right)\right] \cdot \frac{b_j}{f_j}$



1)

a) Man sieht, dass $x_{0{,}25}$ in die 2. Gruppe fällt, also lässt sich $\mathbf{b_2}$ bestimmen !

$$x_{0,25} = 2 + [0,25 - 0,16] \cdot \frac{b_2}{0,36} \overset{!}{=} 2,75$$

6 $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ $\mathbf{b_2 = \underline{3}}$ 3

b) Wegen $\frac{347}{28} \approx 12{,}39$ sieht man (da nun alle Gruppengrenzen bekannt sind), dass $x_{0{,}75}$ in die 3. Gruppe fällt, also lässt sich $\mathbf{f_3}$ bestimmen !

$x_{0,75} = 5 + [0,75 - 0,52] \cdot \frac{9}{f_3} \overset{!}{=} \frac{347}{28}$ $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ $\mathbf{f_3 = \underline{0{,}28}}$ 3

1 2) χ^2 – Homogenitätstest

1 3) H_0 : Beide Stichproben stammen aus derselben Ggh $[\pi_{iF} = \pi_{iM} = \pi_i]$
H_1 : Beide Stichproben stammen **nicht** aus derselben Ggh $[\pi_{iF} \neq \pi_{iM}]$

von … bis unter	h_j (Frauen)	f_j	F (x)	b_j	m_j
0 – 2	4	*0,16*	0,16	2	*1*
2 – 5	9	0,36	*0,52*	3	3,5
5 – 14	7	0,28	0,80	9	9,5
14 – 21	3	0,12	*0,92*	7	*17,5*
21 – *28*	2	0,08	1,00	7	24,5
	$n_F = 25$	1,00			

h_j (Frauen)	h_j (Männer)
4	2
9	1
7	7
3	4
2	1
$n_F = 25$	$n_M = 15$

	Frauen		Männer		
0 – 2	3,75	4	2,25	2	6
2 – 5	6,25	9	3,75	1	10
5 – 14	8,75	7	5,25	7	14
14 – 21	4,375	3	2,625	4	7
21 – 28	1,875	2	1,125	1	3
	$n_F =$	25	$n_M =$	15	$n = 40$

$\tilde{h}_{ij} \geq 1 \; \forall$ Zellen und $\tilde{h}_{ij} \geq 5$ für mind. 80 % der Zellen
Nicht erfüllt !
Daher muss die 1. & 2. Kategorie sowie die 4. & 5. Kategorie zusammengelegt werden !

$\boxed{5}$

	Frauen		Männer		
0 – 5	10	13	6	3	16
5 – 14	8,75	7	5,25	7	14
14 – 28	6,25	5	3,75	5	10
	$n_F =$	25	$n_M =$	15	$n = 40$

$\tilde{h}_{ij} \geq 1 \; \forall$ Zellen ; $\tilde{h}_{ij} \geq 5$ für mind. 80 % der Zellen

2 4) $V = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}}$ ist **unter H₀** approximativ χ^2 – verteilt mit $f = (I-1)\cdot(J-1) = (3-1)\cdot(2-1) = 2$

$B : \{ v / v > 5{,}99 \}$; $c_{[\alpha = 0{,}05\ ;\ f = 2]} = 5{,}99$

1 5) Annahmeber. : $\{ v / v \leq 5{,}99 \}$

$v = \frac{(13-10)^2}{10} + \frac{(3-6)^2}{6} + \frac{(7-8{,}75)^2}{8{,}75} + \frac{(7-5{,}25)^2}{5{,}25} + \frac{(5-6{,}25)^2}{6{,}25} + \frac{(5-3{,}75)^2}{3{,}75} = \underline{3{,}99}$ $\boxed{2}$

7 6) Da $v = 3{,}99 \notin B \Rightarrow$ „**H₀**"

1 7) Basierend auf zwei jeweils einfachen und untereinander unabhängigen Stichproben vom Umfang $n_F = 25$ bzw. $n_M = 15$ und einem Signifikanzniveau von 5 % konnte statistisch **nicht** nachgewiesen werden, dass ein signifikanter Unterschied zwischen Männern und Frauen hinsichtlich der Vorbereitungszeit auf die kommende Klausur besteht.

/25

Aufgabe 3

A

X : „ Von Statistix getrunkene Biermenge am Vorabend einer Klausur [in Liter] “
mit E (X) = 2,25 [Liter] und Var (X) = $\frac{9}{16}\left[\text{Liter}^2\right]$

1) Tschebyscheffsche Ungleichung : $P\left(\underbrace{\mu - c\cdot\sigma}_{=0,25} \le X \le \underbrace{\mu + c\cdot\sigma}_{=4,25}\right) \ge 1 - \frac{1}{c^2}\ ;\ c > 0$

3

$\Rightarrow \mu + c\cdot\sigma = 4,25 \Rightarrow 2,25 + c\cdot\frac{3}{4} = 4,25 \Rightarrow c = 2\cdot\frac{4}{3} = \underline{\frac{8}{3}}$

$\Rightarrow$ P („ Klausur nicht bestehen “) $< \frac{9}{64} = \underline{14,0625\ \%}$

X ist $N(\mu\,;\sigma^2) \sim N\left(2,5\,;\frac{9}{16}\right)$

3

2) $1 - P(0,25 \le X \le 4,25) = 1 - P\left(\frac{0,25-2,5}{3/4} \le V \le \frac{4,25-2,5}{3/4}\right) = 1 - P(-3 \le V \le +2,33) = 1 - \left[P(V \le +2,33) - P(V < -3)\right]$

$= 1 - \left\{P(V \le +2,33) - \left[1 - P(V \le +3)\right]\right\} = 1 - \left[0,990097 - (1 - 0,998650)\right] = 1 - 0,988747 = \underline{0,011253}$

B

X_i : „ Anzahl der gewonnenen Spielrunden beim i–ten Spiel “

1) $\vartheta \cong$ Gewinn in € für ein gewonnenes Spiel

3

2)

x_i	0	1	2
$P(X_i = x_i)$	$(1-\pi)^2$	$2\cdot\pi\cdot(1-\pi)$	π^2

3)

a) $L\left[\pi\,|\,(x_1,\ldots,x_n)\right] = \left[(1-\pi)^2\right]^v \cdot \left[2\cdot\pi\cdot(1-\pi)\right]^e \cdot \left[\pi^2\right]^z = (1-\pi)^{2\cdot v}\cdot\left[2\cdot\pi\cdot(1-\pi)\right]^e\cdot\pi^{2\cdot z}$ 2

b) $\ln L\left[\pi\,|\,(x_1,\ldots,x_n)\right] = 2\cdot v\cdot\ln(1-\pi) + e\cdot\ln\left[2\cdot\pi\cdot(1-\pi)\right] + 2\cdot z\cdot\ln(\pi)$

12

$= 2\cdot v\cdot\ln(1-\pi) + e\cdot\ln(2) + e\cdot\ln(\pi) + e\cdot\ln(1-\pi) + 2\cdot z\cdot\ln(\pi)$ 3

c) $\frac{d\ln L(\pi)}{d\pi} = \frac{2\cdot v}{1-\pi}\cdot(-1) + 0 + \frac{e}{\pi} + \frac{e}{1-\pi}\cdot(-1) + \frac{2\cdot z}{\pi} \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \frac{e}{\hat\pi} + \frac{2\cdot z}{\hat\pi} = \frac{2\cdot v}{1-\hat\pi} + \frac{e}{1-\hat\pi} \Rightarrow \frac{e+2\cdot z}{\hat\pi} = \frac{e+2\cdot v}{1-\hat\pi} \Rightarrow e - e\cdot\hat\pi + 2\cdot z - 2\cdot z\cdot\hat\pi = e\cdot\hat\pi + 2\cdot v\cdot\hat\pi \Rightarrow 2\cdot e\cdot\hat\pi + 2\cdot v\cdot\hat\pi = e - 2\cdot z\cdot\hat\pi$

$\Rightarrow 2\cdot e\cdot\hat\pi + 2\cdot v\cdot\hat\pi + 2\cdot z\cdot\hat\pi = e + 2\cdot z \Rightarrow 2\cdot\hat\pi\cdot(e+v+z) = e + 2\cdot z = 2\cdot\hat\pi\cdot n = e + 2\cdot z \Rightarrow \hat\pi = \underline{\frac{e+2\cdot z}{2\cdot n}}$ 5

d) $\hat\vartheta = 2\cdot 1,5\cdot\hat\pi = \underline{1,5\cdot\frac{e+2\cdot z}{n}}$ 2

3

4) v = 17 ; z = 1 ; e = 2

$\hat\pi = \frac{2+2\cdot 1}{40} = 0,1 \Rightarrow \hat\vartheta = 2\cdot 1,5\cdot\hat\pi = 3\cdot 0,1 = \underline{0,3}$ €

25

Aufgabe MC

A	B	C	D	E
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

≅ richtig