Aufgabe 1

X_i : „ CO_2 – Emission des i–ten Motors $\left[\frac{g}{10\,km}\right]$ “ [i = 1, … , n]

1) 2

a_j	$h(a_j)$	$f(a_j)$	$F(x)$	$a_j \cdot h(a_j)$	a_j^2	$a_j^2 \cdot h(a_j)$
8,2	1	0,0625	0,0625	8,2	67,24	67,24
8,7	4	0,25	0,3125	34,8	75,69	302,76
9,1	4	0,25	0,5625	36,4	82,81	331,24
9,4	1	0,0625	0,625	9,4	88,36	88,36
9,8	2	0,125	0,75	19,6	96,04	192,08
10,0	2	0,125	0,875	20,0	100,0	200,0
10,2	2	0,125	1	20,4	104,04	208,08
	n = 16			148,8		1.389,76

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{7} a_j \cdot h(a_j) = \frac{1}{16} \cdot 148{,}8 = \underline{9{,}3}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{7} a_j^2 \cdot h(a_j) - \frac{n}{n-1} \cdot \overline{x}^2 = \frac{1}{15} \cdot 1.389{,}76 - \frac{16}{15} \cdot 86{,}49 = 92{,}65066667 - 92{,}256 = 0{,}39466667$$

$$\Rightarrow s = \underline{0{,}6282}$$

1 2) Vorzeichenrangtest nach Wilcoxon

2 3) $H_0 : \tilde{\mu} \le \tilde{\mu}_0 (= 9{,}5)$ 1 $\alpha \equiv P$ (“ Werk muss Konsequenzen tragen ” / Emission im zulässigen Bereich) 1

$H_1 : \tilde{\mu} > \tilde{\mu}_0 (= 9{,}5)$

1 4) $W^+ = \sum_{i=1}^{n} Z_i \cdot rg|D_i|$ mit $D_i = X_i - \tilde{\mu}_0$ und $Z_i = \begin{cases} 1 & \text{für } D_i > 0 \\ 0 & \text{für } D_i < 0 \end{cases}$

ist diskret und unter H_0 symmetrisch um $\tilde{\mu}_0$ verteilt

2 5) Annahmebereich : { $w^+ / w^+ \le 100$ } ; B : { $w^+ / w^+ > 100$ }

4 6) Da $w^+ = 43 \notin B \Rightarrow$ „ $\mathbf{H_0}$ “

2 7) Auf … α = 5 % basierend … einfachen … n = 16 konnte statistisch <u>nicht</u> nachgewiesen werden, dass der wahre Median–Richtwert überschritten werden.

i	x_i	d_i	z_i	$rg\|d_i\|$	$z_i \cdot rg\|d_i\|$
1	8,2	– 1,3	0	16	0
2	8,7	– 0,8	0	13,5	0
3	8,7	– 0,8	0	13,5	0
4	8,7	– 0,8	0	13,5	0
5	8,7	– 0,8	0	13,5	0
6	9,1	– 0,4	0	5,5	0
7	9,1	– 0,4	0	5,5	0
8	9,1	– 0,4	0	5,5	0
9	9,1	– 0,4	0	5,5	0
10	9,4	– 0,1	0	1	0
11	9,8	0,3	1	2,5	2,5
12	9,8	0,3	1	2,5	2,5
13	10	0,5	1	8,5	8,5
14	10	0,5	1	8,5	8,5
15	10,2	0,7	1	10,5	10,5
16	10,2	0,7	1	10,5	10,5
					$w^+ = 43$

$X_i \sim N(\mu ; \sigma^2)$; σ^2 unbekannt

1 8) Einseitiger Einstichproben t – Test auf μ

2 9) $H_0 : \mu \le \mu_0 (= 9{,}5)$

$H_1 : \mu > \mu_0 (= 9{,}5)$

2 10) $V = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$ ist unter H_0 (ungünstigstenfalls)

t – verteilt mit f = n – 1

2 11) Annahmeber. : { $v / v \le 1{,}758$ } ; B : { $v / v > 1{,}758$ }

4 12) $v = -1{,}2734 \overset{!}{=} \frac{9{,}3 - 9{,}5}{s/4} \Rightarrow s = \frac{-0{,}8}{-1{,}2734} = \underline{0{,}6282}$

Aufgabe 2

A

fix : 1500 + 600 = 2100 1 4)

B_i : „ Gewicht der Beute (≡ Gold und Diamanten) auf dem i–ten Handelsschiff " [i = 1, … , 7]

$E(B_i) = 95 + 30 = 125$ 2 5)

B : „ Gewicht der gesamten Beute auf allen 7 Handelsschiffen " 1 6)

$$E(B) = E\left[\sum_{i=1}^{7} B_i\right] = \sum_{i=1}^{7} E(B_i) = 7 \cdot 125 = 875$$

G : „ Gesamtgewicht des Piratenschiffs " ; G = fix + B 25

$$E(G) = \mu_G = E(\text{fix} + B) = \text{fix} + E(B) = 2100 + 875 = 2975$$

($G \geq 2950 = 2100 + 850$) ⇨ genug Beute ; ($G \leq 3000$) ⇨ Schiff geht nicht unter

5 1) Tschebyscheffsche Ungleichung : $P\left(\underbrace{\mu_G - c \cdot \sigma_G}_{=2950} \leq G \leq \underbrace{\mu_G + c \cdot \sigma_G}_{=3000}\right) \geq 1 - \frac{1}{c^2} \overset{!}{=} 0{,}94$

⇨ $c = 5$; $2975 + 5 \cdot \sigma_G = 3000$ ⇨ $\sigma_G = 5$ ⇨ $\sigma_G^{\;2} = \underline{25}$

B

1 X : „ Wartezeit auf das nächste Handelsschiff "

1) X ist stetig gleichverteilt in [a ; b] ~ [0 ; 120]

2)

4 a) $P(X = 45) = \underline{0}$ $\boxed{1}$

b) $P(X \geq 80) = \underline{0{,}3333}$ $\boxed{1}$

c) $P(X \leq 90 / X > 60) = \dfrac{P(60 < X \leq 90)}{P(X > 60)} = \dfrac{0{,}25}{0{,}5} = \underline{0{,}5}$ $\boxed{2}$

$Y^{\bullet}$: „ Anzahl der auslaufenden Schiffe [pro Std.] " ; $Y^{\bullet}$ ist $P(\lambda) \sim P(0{,}5)$

Y : „ Wartezeit auf das nächste Handelsschiff "

1 3) Y ist $E(\lambda) \sim E(0{,}5)$ [in t = 1 Std.]

4)

a) $P\left(Y > \dfrac{205}{60}\right) = e^{-0{,}5 \cdot \frac{205}{60}} = e^{-1{,}708} = \underline{0{,}1812}$ $\boxed{1}$

b) $P(2 \leq Y \leq 6) = P(Y \leq 6) - P(Y < 2) = 1 - e^{-0{,}5 \cdot 6} - \left(1 - e^{-0{,}5 \cdot 2}\right) = e^{-0{,}5 \cdot 2} - e^{-0{,}5 \cdot 6} = e^{-1} - e^{-3}$ $\boxed{3}$

7 $= 0{,}3679 - 0{,}0498 = \underline{0{,}3181}$

c) $P\left(Y < \dfrac{45}{60}\right) = 1 - e^{-0{,}5 \cdot \frac{45}{60}} = 1 - e^{-0{,}375} = 1 - 0{,}6873 = \underline{0{,}3127}$ $\boxed{1}$

d) $P(Y \leq 2 + 0{,}5 / Y > 0{,}5) = P(Y \leq 2) = 1 - e^{-0{,}5 \cdot 2} = 1 - e^{-1} = 1 - 0{,}3679 = \underline{0{,}6321}$ $\boxed{2}$

C

X : „ Verhalten des **Kapitäns** bei Lösegeldforderung " ; Y : „ Verhalten des **Besitzers** bei Lösegeldforderung "

1 1) McNemar – Test für abhängige Stichproben

1 2) H_0 : Beide Verh.weisen sind identisch [$\pi_X = \pi_Y$]
H_1 : Beide Verh.weisen sind **nicht** identisch [$\pi_X \neq \pi_Y$]

$\tilde{b} = \tilde{c} = \frac{b+c}{2} \geq 5$

1 3) $V = \dfrac{(b-c)^2}{b+c}$ ist **unter H_0** approximativ

χ^2 – verteilt mit f = 1 ; $c_{[\alpha = 0{,}05 ; f = 1]} = \mathbf{3{,}84}$

X \ Y	*zahlen*	*nicht-zahlen*	
zahlen	25	12 / $\tilde{b} = 10$	37
nicht-zahlen	8 / $\tilde{c} = 10$	5	13
	33	17	n = 50

1 4) Annahmeber. : { v / v ≤ **3,84** } ; B : { v / v > **3,84** }

$$v = \frac{(12-8)^2}{12+8} = \frac{16}{20} = \underline{0,8}$$

2 5) Da v = 0,8 ∉ B ⇨ „$\mathbf{H_0}$"

1 6) Basierend auf einer (zweidim.) verbundenen Stichprobe vom Umfang n = 50 und einem Signifikanzniveau von 5 % konnte statistisch **<u>nicht</u>** nachgewiesen werden, dass sich beide Verhaltensweisen bzgl. der Lösegeldzahlung unterscheiden !

/25

Aufgabe 3

Sei

X_i : „ Anzahl der Nachwuchs bekommenden Weibchen im i–ten Terrarium " $[i = 1, \ldots, n]$

X_i unabhängig und beliebig verteilt mit $E(X_i) = \lambda$

1) Methode der kleinsten Quadrate

$$Q[\lambda|(x_1,\ldots,x_n)] = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\lambda)^2 \to \text{Min}$$

4

$$\frac{dQ[\lambda|(x_1,\ldots,x_n)]}{d\lambda} = 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\lambda)\cdot(-1) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\cdot\hat{\lambda} \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{x}\text{, also : } \hat{\Theta}_1 = \bar{X}$$

Sei

T : „ Wartezeit auf die nächste Insektengeburt "

T ist $E(\lambda)$ [da $X_i \sim P(\lambda)$]

mit $f(t) = \lambda\cdot e^{-\lambda t}$; $E(T) = \frac{1}{\lambda}$; $Var(T) = \frac{1}{\lambda^2} = \sigma^2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sigma}$; $P(T>t) = e^{-\lambda t}$

2) Maximum–Likelihood–Methode

$$L[\sigma|(t_1,\ldots,t_n)] = \prod_{i=1}^{n} f(t_i|\sigma) = \frac{1}{\sigma^n}\cdot e^{-\frac{1}{\sigma}\cdot\sum_{i=1}^{n} t_i}$$

$$\ln L[\sigma|(t_1,\ldots,t_n)] = \ln(1) - n\cdot\ln(\sigma) - \frac{1}{\sigma}\cdot\sum_{i=1}^{n} t_i = -n\cdot\ln(\sigma) - \frac{1}{\sigma}\cdot\sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$\frac{d\ln L[\sigma|(t_1,\ldots,t_n)]}{d\sigma} = \frac{-n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} t_i \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{1}{\hat{\sigma}}\cdot\left[-n + \frac{1}{\hat{\sigma}}\cdot\sum_{i=1}^{n} t_i\right] = 0 \Rightarrow n = \frac{1}{\hat{\sigma}}\cdot\sum_{i=1}^{n} t_i \Rightarrow \hat{\sigma} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} t_i = \bar{t}\text{ ,}$$

5

also : $\hat{\Theta}_2 = \bar{T} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} T_i$

3

3) $E(\bar{T}) = E\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} T_i\right) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} E(T_i) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sigma = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\sigma = \underline{\sigma}$

$$Var(\bar{T}) = Var\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} T_i\right) = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} Var(T_i) = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

3

4) $MSE(\bar{T}) = Var(\bar{T}) + \text{Verzerrung}^2 = Var(\bar{T}) + 0 = \frac{\sigma^2}{n}$

$\lim_{n\to\infty} MSE(\bar{T}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sigma^2}{n}\right) \overset{!}{=} 0$, **also** : $\bar{T}$ ist konsistent

$$L[\sigma|(t_1,\ldots,t_n)] = \prod_{i=1}^{k} f(t_i|\sigma)\cdot\prod_{j=k+1}^{n} P(T_j>z|\sigma) = \frac{1}{\sigma^k}\cdot e^{-\frac{1}{\sigma}\cdot\sum_{i=1}^{k} t_i}\cdot e^{-\frac{1}{\sigma}\cdot(n-k)\cdot z}$$

5) $\ln L[\sigma|(t_1,\ldots,t_n)] = \ln(1) - \ln(\sigma^k) - \frac{1}{\sigma}\cdot\sum_{i=1}^{k} t_i - \frac{1}{\sigma}\cdot(n-k)\cdot z = -k\cdot\ln(\sigma) - \frac{1}{\sigma}\cdot\sum_{i=1}^{k} t_i - \frac{1}{\sigma}\cdot(n-k)\cdot z$

$$\frac{d\ln L[\sigma|(t_1,\ldots,t_n)]}{d\sigma} = -\frac{k}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{k} t_i + \frac{1}{\sigma^2}\cdot(n-k)\cdot z \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{1}{\hat{\sigma}}\cdot\left[-k + \frac{1}{\hat{\sigma}}\cdot\sum_{i=1}^{k} t_i + \frac{1}{\hat{\sigma}}\cdot(n-k)\cdot z\right] = 0$$

7

$$\Rightarrow k\cdot\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^{k} t_i + (n-k)\cdot z \Rightarrow \hat{\sigma} = \frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k} t_i + \frac{(n-k)}{k}\cdot z$$

6) Anteil der Terrarien <u>ohne</u> Geburt $\left[{}^{50}\!/_{122}\right]$ + Anteil der Terrarien <u>mit</u> Geburt $\left[{}^{36}\!/_{n}\right] = 1$; $\underline{k = 36}$; $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1800$

3

$\Leftrightarrow \frac{50}{122} + \frac{36}{n} = 1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \underline{n = 61}$ **Also** : $\hat{\sigma} = \frac{1800}{36} + \frac{(61-36)}{36}\cdot 72 = \underline{100}$

/25

Matr. Nr.:

Aufgabe MC

A	B	C	D	E
□ 1	□ 1	■ 1	■ 1	■ 1
□ 2	□ 2	□ 2	□ 2	■ 2
■ 3	■ 3	□ 3	■ 3	□ 3
■ 4	■ 4	■ 4	□ 4	□ 4

■ ≅ **richtig**

Aufgabe MC	Punkte