

Stochastik für Informatiker

Hinweise zur Klausur am 18.07.01

Sitzordnung

Nehmen Sie Ihre Plätze bitte derart ein, als daß zu Ihrem linken und rechten Nachbarn, falls vorhanden, jeweils zwei Plätze leer bleiben und zudem nur jede zweite Sitzreihe besetzt ist.

Hilfsmittel, Täuschung und Abgabe

Als Hilfsmittel sind ausschließlich zugelassen: Skript, Übungsblätter, eigene Aufzeichnungen, ein Buch (Lehrbuch oder Formelsammlung), Taschenrechner.

Der Versuch der Täuschung oder Benutzung nicht zugelassener Hilfsmittel hat zur Folge, daß die Klausur als nicht bestanden gilt.

Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Ihrem vollen Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Ihnen zugeteilten Ordnungsnummer. Geben Sie *alle* Blätter ab, auch Nebenrechnungen, Schmierzettel und das Aufgabenblatt. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt – dies erleichtert die Korrektur. Schreiben Sie mit Kugelschreiber, Füllfederhalter oder Fineliner, nicht aber mit Bleistift und nicht in der Farbe Rot. Mit Bleistift oder rot geschriebener Text wird nicht bewertet.

Lösung der Aufgaben

Die Aufgaben sind so zu lösen, daß der Rechen- und Lösungsweg nachvollziehbar ist. Insbesondere genügt es nicht, lediglich ein Ergebnis ohne nähere Erläuterung oder Begründung anzugeben.

Neben den hier getroffenen speziellen Bestimmungen gelten die in den einschlägigen Prüfungsordnungen getroffenen Bestimmungen über prüfungsrelevante Studienleistungen.

Werte der Verteilungsfunktion Φ
 der Standardnormalverteilung

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0,5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0.1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0.2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0.3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0.4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0.5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0.6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0.7	7580	7611	7642	7673	7703	7734	7764	7794	7823	7852
0.8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0.9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1.0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1.1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1.2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1.3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1.4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1.5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1.6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1.7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1.8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1.9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2.0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2.1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2.2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2.3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2.4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2.5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2.6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2.7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2.8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2.9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3.0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3.1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3.2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3.3	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997

Einige besonders häufig benötigte Werte:
 $\Phi(1,282) = 0,9000$
 $\Phi(1,645) = 0,9500$
 $\Phi(1,960) = 0,9750$
 $\Phi(2,326) = 0,9900$
 $\Phi(2,576) = 0,9950$
 $\Phi(3,090) = 0,9990$
 $\Phi(3,291) = 0,9995$

Klausur

Name:

Matrikelnr.:

Punkte	Note
--------	------

Ordnungsnr.:

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Laut Statistik infiziert sich eine von 10.000 Personen mit einem gewissen Virus. Das Resultat eines entsprechenden Antikörpertests ist bei 99 % der Infizierten positiv.

- Wie groß darf die Wahrscheinlichkeit eines falsch-positiven Tests sein, damit die Wahrscheinlichkeit, daß bei positivem Testergebnis tatsächlich eine Infektion vorliegt, mindestens 80 % beträgt? Dabei versteht man unter der Wahrscheinlichkeit eines falsch-positiven Tests jene Wahrscheinlichkeit, daß unter der Annahme, eine Person sei nicht infiziert, der Test dennoch fälschlich positiv ausfällt.
- Wie groß ist, unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus a), die Wahrscheinlichkeit, daß bei negativem Testergebnis keine Infektion vorliegt?

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Ein Fußgängerüberweg werde in der einen Richtung – wir wollen sie Richtung A nennen – von durchschnittlich einem Fahrzeug je Zeiteinheit passiert und, unabhängig davon, in der entgegengesetzten Richtung B von durchschnittlich zwei Fahrzeugen je Zeiteinheit. Die Ampeln an diesem Überweg seien jeweils eine Zeiteinheit auf Rot gestellt, und zwar gleichzeitig in jeder Richtung. Die Zahl der je Zeiteinheit ankommenden Fahrzeuge kann als Poisson-verteilte Zufallsgröße aufgefaßt werden.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 2 Fahrzeuge in Richtung A während der Rotphase ankommen?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 2 Fahrzeuge in Richtung B während der Rotphase ankommen?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in jeder Richtung mindestens zwei Fahrzeuge während der Rotphase ankommen?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in beiden Richtungen zusammen mindestens zwei Fahrzeuge während der Rotphase ankommen?

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Eine faire Münze werde 900-mal geworfen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis *Kopf oben* zwischen 420- und 480-mal auftritt.

- Man gebe eine Formel zur exakten Bestimmung an und begründe diese. (Nicht ausrechnen!)
- Welche Methoden sind geeignet, die Wahrscheinlichkeit näherungsweise zu bestimmen?
- Von den unter b) genannten, wende man die bestmögliche Näherung an und bestimme den Wert dieser Näherung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Sei (X_k) eine Markoff-Kette auf dem Zustandsraum $S = \{A, B, C, D, E\}$ mit den absorbierenden Zuständen A und E : Ist das System in einem der Zustände B, C oder D , so geht es mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ in den durch den im Alphabet vorhergehenden Buchstaben beschriebenen Zustand über und mit der Wahrscheinlichkeit $2/3$ in den durch den im Alphabet nachfolgenden Buchstaben beschriebenen Zustand über. Ist das System im Zustand A oder E , so verbleibt es dort.

- Man beschreibe das System durch ein geeignetes Diagramm und durch die stochastische Matrix.
- Man bestimme eine Gleichgewichtsverteilung. Ist diese eindeutig bestimmt?
- Wie lautet die Verteilung von X_{1000} , wenn mit einer Gleichgewichtsverteilung gestartet wird?

Das System werde nun wie folgt abgeändert: Der Zustand A bleibe weiterhin absorbierend; ist das System also im Zustand A , so verbleibt es dort. Der Zustand E dagegen sei nun reflektierend; ist das System im Zustand E , so geht es garantiert in den Zustand D über.

- Wiederum beschreibe man die Markoff-Kette durch ein Diagramm und die stochastische Matrix.
- Wiederum bestimme man eine Gleichgewichtsverteilung. Ist diese eindeutig bestimmt?