Stochastik-Klausur SS2002
Bearbeitungszeit: ca. 135 min
Übersichtszettel + Taschenrechner erlaubt

Name: ....

Aufgabe 1: Es seien X, Y unabhängige auf $\{-1, 1\}$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, daß X und XY unabhängig sind.

Name: ....

Aufgabe 2: Bei der Übertragung auf einem binären Kanal kommen die Zeichen **O** und **L** im Verhältnis 3 : 4 vor. Ein **O** wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% fehlerhaft übermittelt (d.h. als **L** empfangen), ein **L** mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% (d.h. als **O** empfangen).

(a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ an.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß bei der Übertragung eines Zeichens ein Fehler auftritt.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß ein **O** empfangen wird.

(d) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß ein **O** gesendet wurde, wenn ein **O** empfangen wird (Bayes).

Name: ....

Aufgabe 3: Ein fairer Würfel werde n-mal geworfen, $n \geq 2$. Es bezeichne A das Ereignis "Es erscheint mindestens einmal die Sechs und mindestens einmal die Eins". Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, formulieren Sie das Ereignis A mengentheoretisch, und berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit.

Name: ....

Aufgabe 4: In einem neuen Stochastikskript der TU-Berlin mit 300 Seiten sind 200 Druckfehler. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß auf der Seite 1 mehr als ein Druckfehler vorhanden ist, wenn man die Binominal- bzw. die Poissonverteilung zugrunde legt?

Name: ....

Aufgabe 5: Eine Person behauptet, mit transzendentalen Fähigkeiten das Ergebnis eines fairen Münzwurfs vorhersagen zu können. Bei einem Versuch von 36 unabhängigen Münzwürfen gelingt es ihr 20 Mal, das Ergebnis richtig vorherzusagen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit würde sie mindestens 20 Treffer erzielen, wenn sie in Wirklichkeit nur rät? Verwenden Sie die Normalapproximation und die beiliegende Tabelle.

Aufgabe 6: Einer der besten Wettervorhersagen für den morgigen Tag ist die Vorhersage, daß das Wetter am morgigen Tag gleich bleiben wird. Wenn wir dies als richtig annehmen, können wir das Wetter als Markov-Kette modellieren, indem wir die Übergangswahrscheinlichkeit in denselben Zustand als die Sicherheit dieser Vorhersage interpretieren. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß es nur zwei verschiedene Arten von Wetter gibt: Regen und Sonnenschein. Für das Wetter in Los Angeles ist obige Vorhersage zu 50% korrekt, wenn es an dem heutigen Tag regnet, und sie ist zu 90% korrekt, wenn an dem heutigen Tag die Sonne scheint.

(a) Geben Sie einen geeigneten Zustandsraum E und die Übergangsmatrix $\mathbb{P}$ an und zeichnen Sie kurz den Übergangsgraphen.

(b) Ermitteln Sie alle stationären Verteilungen der Markov-Kette.

(c) Berechen Sie die dritte Übergangswahrscheinlichkeit für Regen beim deterministischen Start bei Sonnenschein.

Probabilities for the standard normal distribution

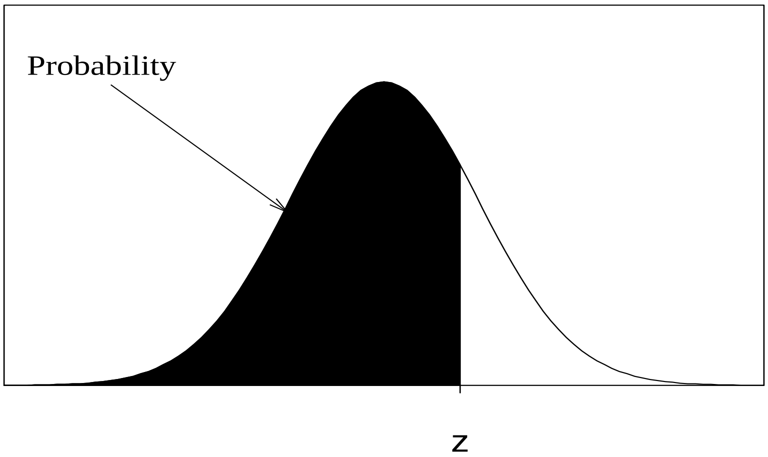

Table entry for z is the probability lying to the left of z

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998