

17. Juli 2004

**Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik**

Stochastik für Informatiker, Sommersem.2004

Dozent: Michel Sortais

Klausur

NAME, Vorname : Matr.-Nr. :

Hilfsmittel, Anweisungen:

- Als Hilfsmittel sind ausschließlich zugelassen: ein handbeschriebenes A4 Blatt (beidseitig) und ein nicht programmierbarer Taschenrechner.
- Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Ihrem vollständigen Namen, Vornamen, und Ihrer Matrikelnummer. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt - dies erleichtert die Korrektur.
- Schreiben Sie mit Kugelschreiber, Füllfederhalter oder Fineliner, nicht aber mit Bleistift und nicht in der Farbe Rot.

Korrektur: Jede der ersten 5 Übungen wird mit 4 Punkten bewertet, und die letzte wird mit 2 Punkten bewertet. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 10 der 22 möglichen Punkten erreicht werden.

1	2	3	4	5	6	Σ

NAME, Vorname : Matr.-Nr. :

1. Die 52 Karten eines gewöhnlichen Spieles werden an 4 Spieler A, B, C, D verteilt (jeder Spieler bekommt 13 Karten).
 - a) Geben Sie einen geeigneten diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; p)$ für dieses Experiment an.
(Tipp: für Ω kann man eine Menge von Permutationen annehmen).
 - b) Sei E das Ereignis: "Spieler A hat alle vier Könige bekommen". Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von E .
 - c) Sei F das Ereignis: "Spieler B hat alle vier Damen bekommen". Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit von F gegeben E ; sind E und F unabhängig?

Zur b) und c): Schreiben Sie bitte Ihre numerischen Ergebnisse als **gekürzte Brüche**.

NAME, Vorname : *Matr.-Nr.* :

- 2.** An einer mathematischen Übung sind 8 Studenten des 1. Semesters, 10 Studenten des 2. Semesters und 6 Studenten des 3. Semesters beteiligt. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine abgegebene Arbeit fehlerfrei ist, sei 0,5 für die ersten, 0,7 für die zweiten, 0,9 für die dritten Semester.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine vorliegende fehlerfreie Arbeit von einem Studenten des 1. Semesters stammt?

NAME, Vorname : Matr.-Nr. :

3. Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte f_X gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} Cx^2 & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei C eine positive Konstante ist.

- a) Berechnen Sie den Wert von C .
- b) Benutzen Sie die Tschebyscheffsche Ungleichung, um eine obere Schranke für $\mathbb{P}\{|X| > 0,9\}$ anzugeben.
- c) Berechnen Sie $\mathbb{P}\{|X| > 0,9\}$ exakt.

NAME, Vorname : Matr.-Nr. :

4. Eine Million Wähler müssen sich zwischen den Kandidaten A und B entscheiden. Eine Minderheit von tausend Wählern hat sich bereits für Kandidaten A entschieden, die restlichen Wähler werfen eine faire Münze.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Kandidat A die Wahl gewinnen?
Tipp: es reicht eine geeignete Approximation.

NAME, Vorname : Matr.-Nr. :

5. Auf einem Kreisumfang sind 5 Punkte markiert. Ein Objekt bewegt sich von demjenigen Punkt, auf dem es gerade sitzt, zu einem der beiden benachbarten Punkte, und zwar zu jedem mit derselben Wahrscheinlichkeit $1/2$ (Zirkuläre Irrfahrt).
- a) Geben Sie den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix P dieser Markoffkette $(X_n)_{n \geq 0}$ an.
 - b) Berechnen Sie P^2 und $P^4 = (P^2)^2$. Wieviele Nullen kommen in P^k für $k \geq 4$ vor?
 - c) Was ist die invariante Verteilung π dieser Markoffkette? Konvergiert die Verteilung von $(X_n)_{n \geq 0}$ gegen π ?
(Begründen Sie bitte ihrer Antwort).

NAME, Vorname : Matr.-Nr. :

6. Die Durchmesser, der von einer bestimmten Maschine gefertigten Stahlkugeln für Kugellager, seien ungefähr normalverteilt, mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 30$ erhält man einen mittleren Durchmesser

$$\bar{x}_{30} = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} x_i = 10,2mm$$

und eine korrigierte Stichprobenvarianz

$$\hat{v}_{30}^2 = \frac{1}{29} \sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x}_{30})^2 = 0,3844mm^2$$

Bestimmen Sie hieraus

- a) ein beidseitiges Konfidenzintervall zum Sicherheitsniveau $\alpha = 0,99$ für den Erwartungswert μ , und
- b) ein einseitiges Konfidenzintervall zum Sicherheitsniveau $\alpha = 0,95$ für die Varianz σ^2 .

NAME, Vorname : Matr.-Nr. :
