30. August 2004

Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik

Stochastik für Informatiker, Sommersem.2004

Dozent: Michel Sortais

Nachlausur

NAME, Vorname : .... *Matr.-Nr.* : ....

Hilfsmittel, Anweisungen:

• Als Hilfsmittel sind ausschließlich zugelassen: ein handbeschriebenes A4 Blatt (beidseitig) und ein nicht programmierbarer Taschenrechner.
• Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Ihrem vollständigen Namen, Vornamen, und Ihrer Matrikelnummer. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt - dies erleichtet die Korrektur.
• Schreiben Sie mit Kugelschreiber, Füllfederhalter oder Fineliner, nicht aber mit Bleistift und nicht in der Farbe Rot.

Korrektur: Jede der ersten 5 Aufgaben wird mit 4 Punkten bewertet, und die letzte wird mit 2 Punkten bewertet. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 10 der 22 möglichen Punkten erreicht werden.

NAME, Vorname : .... *Matr.-Nr.* : ....

1. Auf einem Parkplatz stehen N Fahrzeuge nebeneinander. Auf Platz Nummer i, $i \neq 1, i \neq N$, stehe die silbergraue Luxuskarosse von Herrn Lottermoser. Nach einigen Stunden ist diese Luxuskarosse immer noch am selben Platz, aber von den $N-1$ übrigen Wagen sind genau r Wagen weggefahren, und die entsprechenden r Plätze bleiben leer.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $w = w(r)$, daß beide Plätze unmittelbar neben Herrn Lottermosers Wagen leer sind?

Für $r = 1$ hat man offensichtlich: $w(r) = 0$; sonst $(2 \leq r \leq N-1)$ gibt es $\binom{N-3}{r-2}$ günstige Möglichkeiten, und insgesamt $\binom{N-1}{r}$ Möglichkeiten, so daß

$$w(r) = \frac{\binom{N-3}{r-2}}{\binom{N-1}{r}} = \frac{(N-3)!r!}{(N-1)!(r-2)!} = \frac{r(r-1)}{N(N-1)}$$

NAME, Vorname : .... *Matr.-Nr.* : ....

2. Eine Münze wird geworfen bis Kopf erscheint, höchstens jedoch dreimal.

a) Geben Sie einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; p)$ an, der diesem Experiment entspricht.

b) Stellen Sie als Teilmengen von Ω folgende Ereignisse dar:

A : die Münze wird dreimal geworfen, B : Kopf erscheint nicht schon beim ersten Mal.

c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(A|B)$. Sind A und B unabhängig?

a) Für Ω kann man die Menge $\{K, (Z,K), (Z,Z,K), (Z,Z,Z)\}$ annehmen, und $p : \Omega \longrightarrow [0,1]$ ist dann gegeben durch

$$p(K) = 1/2, \quad p((Z,K)) = 1/4, \quad p((Z,Z,K)) = p((Z,Z,Z)) = 1/8$$

b) $A = \{(Z,Z,K), (Z,Z,Z)\}$, $B = A \cup \{(Z,K)\}$

c) $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)$, also A und B sind nicht unabhängig.

NAME, Vorname : .... *Matr.-Nr.* : ....

3. Drei Mädchen, Alice, Betty und Charlotte, waschen das Geschirr der Familie ab. Da Alice die älteste der drei ist, muß sie in 40% aller Fälle das Geschirr abwaschen; Betty und Charlotte sind in jeweils 30% aller Fälle an der Reihe. Die Wahrscheinlichkeit, daß beim Abwasch mindestens ein Stück zu Bruch geht, sind für Alice, Betty und Charlotte der Reihe nach: $0,02$, $0,03$ und $0,02$.

Eines Tages hören die Eltern, die nicht wissen, wer das Geschirr abwäscht, daß in der Küche Geschirr zerbrochen ist. Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, daß das Mißgeschick

a) Alice , b)Betty oder c)Charlotte

passiert ist?

Seien A, B und C die Ereignisse:

$A:$ "Alice wäscht ab", $B:$ "Betty wäscht ab", $C:$ "Charlotte wäscht ab",

und $E:$ "Mindestens ein Stück geht zu Bruch".

Laut Bayes Formel hat man

$$\mathbb{P}(A|E) = \frac{\mathbb{P}(E|A)\cdot\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(E|A)\cdot\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(E|B)\cdot\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(E|C)\cdot\mathbb{P}(C)},$$

also

$$\mathbb{P}(A|E) = \frac{0,02\cdot 0,4}{0,02\cdot 0,4+0,03\cdot 0,3+0,02\cdot 0,3} = \frac{0,008}{0,008+0,009+0,006} = \frac{8}{23} \simeq 0,348,$$

und analog:

$$\mathbb{P}(B|E) = \frac{0,03\cdot 0,3}{0,02\cdot 0,4+0,03\cdot 0,3+0,02\cdot 0,3} = \frac{0,009}{0,008+0,009+0,006} = \frac{9}{23} \simeq 0,391,$$

$$\mathbb{P}(C|E) = 1-(\mathbb{P}(A|E)+\mathbb{P}(B|E)) = \frac{6}{23} \simeq 0,261$$

NAME, Vorname : .... *Matr.-Nr.* : ....

4. In einer Bevölkerung sind etwa 1% Linkshänder.

a) Bestimmen Sie mittels eine Poissonsche Approximation die Wahrscheinlichkeit, daß unter 200 Leuten (aus dieser Bevölkerung) mindestens 4 Linkshänder sind.

b) Bestimmen Sie nochmals dieselbe Wahrscheinlichkeit mittels einer Gaußschen Approximation.

a) Die Anzahl X der Linkshänder ist eine binomial-verteilte Zufallsvariable mit Parametern $n = 200, p = 0,01$, und ihrer Verteilung lässt sich approximieren durch die Verteilung einer Poissonsche Variable Y mit Param.: $\lambda = n \cdot p = 2$. Also hat man:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X \geq 4\} &= 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{200}{k} (0,01)^k (0,99)^{200-k} \\ &\simeq \mathbb{P}\{Y \geq 4\} = 1 - e^{-2}\left(1 + 2 + \tfrac{2^2}{2!} + \tfrac{2^3}{3!}\right) \approx 0,143 \end{aligned}$$

b) Laut dem zentralen Grenzwertsatz lässt sich die Verteilung von der Variable

$$Z = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X - 2}{\sqrt{200 \cdot 0,01 \cdot 0,99}}$$

gut approximieren durch die Verteilung einer standard Gaußsche Zufallsavariable Z^*. Dann hat man ("Stetigkeitskorrektur"):

$$\mathbb{P}\{X \geq 4\} = \mathbb{P}\{X > 3\} = \mathbb{P}\{X \geq 3,5\},$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X \geq 3,5\} &= \mathbb{P}\left\{Z \geq \tfrac{3,5-2}{\sqrt{200 \cdot 0,01 \cdot 0,99}}\right\} \\ &\simeq \mathbb{P}\left\{Z^* \geq \tfrac{1,5}{\sqrt{1,98}}\right\} \\ &= \int_{\frac{1,5}{\sqrt{1,98}}}^{\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \approx 0,145 \end{aligned}$$

NAME, Vorname : .... *Matr.-Nr.* : ....

5. Einem Mensakoch stehen als Grundnahrungsmittel Reis, Nudeln und Kartoffeln zur Verfügung.

Bei der Zusammenstellung eines Mittagessens geht er folgendermaßen vor:

a) Kocht er an einem Tag Reis, so wechselt er auf jeden Fall; wählt aber am folgenden Tag rein zufällig zwischen Kartoffeln und Nudeln.

b) Gibt es Nudeln, so wirft er eine Münze. Erscheint Wappen, so kocht er am nächsten Tag wieder Nudeln, erscheint Kopf, so wirft er die Münze noch einmal und kocht am nächsten Tag Reis oder Kartoffeln, je nachdem, ob nun Kopf oder Wappen erscheint.

c) Werden zum Mittagessen einmal Kartoffeln zubereitet, so entscheidet sich der Koch am nächsten Tag rein zufällig für eines der drei Grundnahrungsmittel.

Für die Markoffkette mit den Zuständen e_1 ("Reis"), e_2 ("Nudeln") und e_3 ("Kartoffeln"), bestimme man

a) Die Übergangsmatrix P

b) Die invariante Verteilung $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$.

a)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

b) Offensichtlich ist diese Markoffkette irreduzibel und aperiodisch, sie besitzt also eine eindeutige invariante Verteilung $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, und $\boldsymbol{\pi}$ erfüllt: $\boldsymbol{\pi} \times P = \boldsymbol{\pi}$, d.h.

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_1 \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_2 \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_3 \end{cases}$$

Man findet also:

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (2/9, 4/9, 1/3)$$

NAME, Vorname : .... *Matr.-Nr.* : ....

6. Die Zufallsvariable, welche die Leistung von Automotoren beschreibt, sei ungefähr normalverteilt. Die Überprüfung von 10 zufällig ausgewählten Motoren ergab eine mittlere Leistung von

$$\overline{x}_{10} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 40,9PS$$

und eine korrigierte Stichprobenvarianz

$$\hat{v}_{10}^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x}_{10})^2 = 9,61PS^2$$

Bestimmen Sie hieraus beidseitige Konfidenzintervalle zum Sicherheitsniveau $\alpha = 0,95$ und $\alpha = 0,99$ für den Erwartungswert μ dieser Normalverteilung.

Man weiß, dass $\frac{\sqrt{10}(\overline{X}_{10}-\mu)}{\hat{V}_{10}}$ eine Studentsche Variable mit 9 Freiheitsgraden ist. Es gilt also:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\mu \in \left[\overline{X}_{10} - C \cdot \tfrac{\hat{V}_{10}}{\sqrt{10}}; \overline{X}_{10} + C \cdot \tfrac{\hat{V}_{10}}{\sqrt{10}}\right]\right\} &= \mathbb{P}\left\{-C \leq \tfrac{\sqrt{10}(\overline{X}_{10}-\mu)}{\hat{V}_{10}} \leq C\right\} \\ &= F_{t_9}(C) - F_{t_9}(-C) = 2 \cdot F_{t_9}(C) - 1\end{aligned}$$

Für das Niveau $\alpha = 0,95$ findet man also

$$C \approx 2,26$$

und dann:

$$I \approx [38,684; 43,115],$$

und für das Niveau $\alpha = 0,99$:

$$C \approx 3,25, \quad I \approx [37,714; 44,086]$$