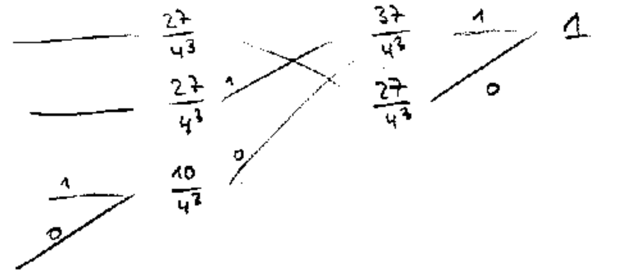
Oktoberklausur „Stochastik für Informatiker" SS05

Aufgabe 1:

ii)

k	$P(X_1=k)$
0	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{4^3}$
1	$3\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{4^3}$
2	$3\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4} = \frac{9}{4^3}$
3	$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4^3}$



Code
0
11
101
100

$$\text{mittlere Codelänge} = 3\cdot\frac{10}{4^3} + 2\,\frac{27}{4^3} + 1\cdot\frac{27}{4^3} = \frac{111}{64}$$

i.) Ein guter Kodierverfahren benötigt ca. $H(X_1)$ Bit pro Symbol.
$\uparrow$ Entropie

$$H(X_1) = -\left(\frac{3}{4}\right)^3\log_2\left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\right)^3\log_2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3^2}{4^3}\log_2\frac{3^2}{4^3} - \frac{1}{4^3}\log_2\frac{1}{4^3}$$

$$\approx -\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot 3\,(\underbrace{\log_2 3}_{\approx 1{,}6} - \underbrace{\log_2 4}_{2}) - \left(\frac{3}{4}\right)^3 2\,(1{,}6-2) - \frac{3^2}{4^3}(2\cdot 1{,}6 - 3\cdot 2) + \frac{1}{4^3}\,3\cdot 2$$

iii.) Im Allgemeinen gilt

$$H(X_1) \le \text{mittlere Codelänge des Huffman Codes} < H(X_1) + 1\,.$$

Aufgabe 2:

$$EX^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{k^2}_{=k(k-1)+k} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda^2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^{k-2}}{k!}e^{-\lambda} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}_{=E(X)=\lambda}$$

$$= \lambda^2\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}_{=1} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$\Rightarrow \operatorname{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda\,.$$

3. Aufgabe:

i) Angenommen $P(A) = 0$. Dann gilt

$$\left.\begin{aligned} &P(A\cap B) \le P(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0 \\ &\underbrace{P(A)}_{=0} \cdot P(B) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) \text{, d.h.}$$

A und B sind unabh.

ii) Angenommen $P(A) = 1$. Dann gilt

$$\left.\begin{aligned} &P(A\cap B) = P(B) - \underbrace{P(B\cap A^c)}_{=0\text{, da } P(A^c)=0} = P(B) \\ &P(A)\cdot P(B) = P(B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{A und B sind unabh.}$$

4. Aufgabe:

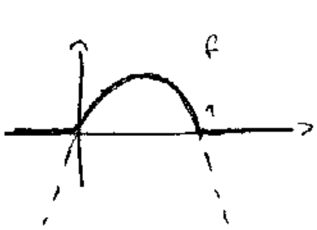
$$E((X_1+X_2)(X_2+X_3)\cdot X_1) = E\left(X_1^2(X_2+X_3)\right) + X_2^2 X_1 + X_1X_2X_3)$$

$$= \underbrace{E(X_1^2)}_{\substack{\shortparallel \\ Var(X_1) + (E(X_1))^2 = \sigma^2+\mu^2}} \cdot \underbrace{E(X_2+X_3)}_{=2\mu} + \underbrace{E(X_2^2)}_{/\!/} \underbrace{E(X_1)}_{=\mu} + \underbrace{E(X_1)\cdot E(X_2)\cdot E(X_3)}_{=\mu^3}$$

$$= 2\mu(\sigma^2+\mu^2) + \mu(\sigma^2+\mu^2) + \mu^3 = 4\mu^3 + 3\mu\sigma^2.$$

5. Aufgabe:

i) Skizze



Da

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c\int_0^1 x(1-x)\,dx$$

$$= c\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{c}{6}$$

muss man $c = 6$ wählen.

ii.) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c\int_0^a x(a-x)\,dx = c\left[\tfrac{1}{2}ax^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^a = c\,\frac{a^3}{6} \overset{!}{=} 1 \qquad (1)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx = c\int_0^a x^2(a-x)\,dx = c\left[\tfrac{1}{3}ax^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^a = \frac{c}{12}\,a^4 \overset{!}{=} 1 \qquad (2)$$

(2) liefert $\boxed{c = \frac{12}{a^4}}$. Einsetzen in (1) ergibt $\frac{2}{a} = 1 \Rightarrow \boxed{a=2}$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{3}{4}}$$

iii.) Für $u \in [0,1]$ gilt

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)\,dx = 6\int_0^u x(1-x)\,dx = 6\left[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^u$$

$$= 3u^2 - 2u^3$$

Also ist

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & , u \le 0 \\ 3u^2 - 2u^3 & , u \in [0,1] \\ 1 & , u \ge 1 \end{cases}$$

<u>6. Aufgabe:</u>

ii.) Sei N eine standardnormalverteilte ZV.

Dann ist $\sigma N + \mu$ $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$-verteilt, und

$$\mathbb{P}(X_1 \le a) = \mathbb{P}(\sigma N + \mu \le a) = \mathbb{P}\left(N \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Wir setzen nun $a = 500\,ml$, $\sigma = 2\,ml$. Damit $\mathbb{P}(X_1 \le 500\,ml) = 1\%$, muss

$$\frac{a-\mu}{\sigma} = \underset{\substack{\uparrow \\ 1\%\text{ Quantil der } \mathcal{N}(0,1)\text{-Vert.}}}{\tau_{0{,}01}} = -\tau_{0{,}99} = -2{,}33$$

gelten.

Einsetzen der Werte liefert:

$$\mu = a + 2{,}33\,\sigma = 500\,ml + 4{,}66\,ml = \underline{\underline{504{,}66\,ml}}$$

i) Kofidenzintervall

$$\left[\bar{X}_{16} - \frac{\hat{s}_{16}}{4}\,\tau_{0,99}\ ,\ \bar{X}_{16} + \frac{\hat{s}_{16}}{4}\,\tau_{0,99} \right]$$

wobei

$\tau_{0,99}$ = 99% Quantil der t_{15}-Verteilung $= 2{,}6$

Für die angegeb. Stichprobe erhält man das Intervall

$$\left[503 - \frac{3}{4}\,2{,}6\ ,\ 503 + \frac{3}{4}\cdot 2{,}6 \right]$$

7. Aufgabe:

Übergangsmatrix:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Bestimmung von $\mathrm{Kern}(\mathbb{I} - \mathbb{P}^*)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ -1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Kern}(\mathbb{I} - \mathbb{P}^*) = \left\{ \begin{pmatrix} 2/3\,t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Nun ist $\left(\frac{2}{3} + 2 + 1\right) t = \frac{11}{3} t$ gleich 1 für $t = \frac{3}{11}$ und wir erhalten die invariante Verteilung

$$\pi = \left(\frac{2}{11}\ ,\ \frac{6}{11}\ ,\ \frac{3}{11} \right) \qquad \text{(i. Vektorschreibweise)}$$