Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 07

Prof. Dr. J. Gärtner 20. Juli 2007

Juli – Klausur

Stochastik für Informatiker

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Als Hilfsmittel ist allein ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen zugelassen! Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe 4 Punkte

Aus einer Urne mit N nummerierten Bällen von 1 bis N ziehen Sie fünf Bälle ohne Zurücklegen und gruppieren die gezogenen Zahlen in Ketten. Eine 'Kette' ist dabei eine Menge von direkt aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Beispiel:
$\{4,5,9,1,8\} \simeq \{(1),(4,5),(8,9)\}$ bzw. $\{8,11,9,18,10\} \simeq \{(8,9,10,11),(18)\}$.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für eine Kette der Länge 5?

Loesung:
Insgesamt sind $\binom{N}{5}$ Ziehungen möglich, jede ist gleich wahrscheinlich.
Günstige Ziehungen sind von der Form $\{i, i+1, i+2, i+3, i+4\}$ mit $i \in \{1, \ldots, N-4\}$ und j beliebig aus dem Rest, somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $(N-4)/\binom{N}{5}$.

2. Aufgabe 2+4 Punkte

Wenn es regnet, nimmt Herr S. mit Wahrscheinlichkeit 0.7 seinen Schirm mit zur Arbeit, wenn es nicht regnet, lässt er ihn mit Wahrscheinlichkeit 0.8 zu Hause. Wenn Herr S. seinen Regenschirm dabei hat, regnet es mit Wahrscheinlichkeit 0.35.

a) Geben Sie die Bayes'sche Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit von Regen an, wenn Herr S. seinen Schirm zur Arbeit nimmt.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für Regen insgesamt?

Loesung:
Es bezeichne S das Ereignis, dass Herr S. seinen Schirm mitnimmt und R das Ereignis, dass es regnet.
a)

$$P(R|S) = \frac{P(S \cap R)}{P(S)} = \frac{P(S|R) \cdot P(R)}{P(S)} = \frac{P(S|R) \cdot P(R)}{P(S|R)P(R) + P(S|R^c)P(R^c)}$$

b) Es bezeichne $p = P(R)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Es gilt

$$P(S) = P(S|R) \cdot p + P(S|B^c) \cdot (1-p).$$

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich $P(S|R) = 0.7$, $P(S|B^c) = 0.2$ und $P(R|S) = 0.35$, d.h. mit a)

$$0.35 = \frac{0.7 \cdot p}{0.7 \cdot p + 0.2 \cdot (1-p)}$$

Aufgelöst nach der Unbekannten p ergibt das $p = 2/15$.

3. Aufgabe 6 Punkte

Die Zufallsvariablen X, Y seien unabhängig und jeweils gleichverteilt auf der zweielementigen Menge $\{-1, 1\}$.

Zeigen Sie, dass X und XY unabhängig sind.

Loesung:
Die Zufallsvariable XY ist ebenfalls gleichverteilt auf $\{-1,1\}$. Somit gilt $P(X = i, XY = j) = P(X = i, Y = i \cdot j) = P(X = i) \cdot P(Y = i \cdot j) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(X = i) \cdot P(XY = j)$ für alle $i, j \in \{-1, 1\}$, was zu beweisen war.

4. Aufgabe

2+2+2 Punkte

In einem Buch mit 200 Seiten seien 300 Tippfehler zufällig verteilt.

a) Es sei X die Anzahl der Tippfehler auf Seite 140. Begründen Sie, warum X binomialverteilt ist, und geben Sie die Parameter n und p an.
b) Berechnen Sie approximativ $P(X = 3)$ mit der Poisson-Verteilung.
(Die Werte der Exponentialfunktion $x \to e^x$ seien als bekannt voraussgesetzt.)
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass auf den ersten 100 Seiten mehr als 160 Tippfehler verteilt sind, approximativ mit der Normalverteilung.
(Die Werte der Verteilungsfunktion $x \to \Phi(x)$ der Standardnormalverteilung seien als bekannt voraussgesetzt.)

Loesung:
a) Jeder Tippfehler steht unabhängig von den anderen jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p = 1/200$ auf der Seite 140. Damit ist X als Anzahl der 'Erfolge' $B(300, 1/200)$-verteilt
b) Für die Poisson-Approximation setze $\lambda = n \cdot p = 3/2$. Damit ist dann approximativ $P(X = 3) \simeq \pi_\lambda(3) = e^{-3/2}\frac{(3/2)^3}{3!}$.
c) Mit demselben Argument wie in a) ist die Anzahl Z der Fehler in den ersten 100 Seiten $B(300, 1/2)$-verteilt. Folglich ist $\sigma(Z) = 5 \cdot \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} P(Z \leq 160) &= P(Z - E(Z) \leq 160 - E(Z)) = P(Z - 150 \leq 10) \\ &= P(\frac{Z - E(Z)}{\sigma(Z)} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}) \approx P(\eta \leq \frac{2}{\sqrt{3}}) = \Phi(\frac{2}{\sqrt{3}}), \end{aligned}$$

wobei η eine standard-normalverteilte Zufallsvariable bezeichnet. Also ist die gesuchte Warhscheinlichkeit

$$P(Z \leq 160) \approx 1 - \Phi(\frac{2}{\sqrt{3}}).$$

5. Aufgabe

4+2 Punkte

Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen mit $E(X_i) = 0$ und

$$\mathrm{cov}(X_i, X_j) = i^2 + j^2 - (i - j)^2.$$

a) Berechnen Sie die Varianz von $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. (Hinweis: $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n + 1)$.)
b) Beweisen Sie, dass für beliebiges $\epsilon > 0$

$$P(|S_n| > n^3 \cdot \epsilon) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Loesung:
a) Wegen $E(X_i) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt auch $E(S_n) = 0$. Mit der binomischen Formel ist $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 2i \cdot j$, also

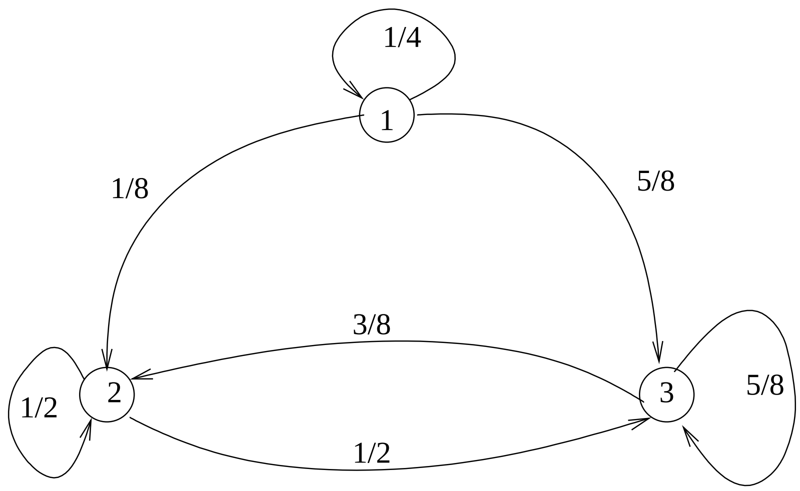
$$\mathrm{V}(S_n) = E(S_n \cdot S_n) = E(\sum_i \sum_j X_i \cdot X_j) = 2 \sum_{i,j=1}^{n} i \cdot j = \frac{1}{2}n^2(n + 1)^2$$

b) Mit der Tschebyschev-Ungleichung gilt

$$P(|S_n| > n^3 \cdot \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2 n^6}\mathrm{V}(S_n) = \frac{n^2(n + 1)^2}{2\epsilon^2 n^6} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

6. Aufgabe 1+2+1+2 Punkte

Betrachten Sie eine Markov-Kette X auf dem Zustandsraum $Z = \{1, 2, 3\}$ mit dem folgenden Übergangsgraphen.



a) Klassifizieren Sie die Zustände, d.h. bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der Markovkette X auf Z.
b) Stellen Sie die Übergangsmatrix P von X auf.
c) Bestimmen Sie $P(X_3 = 3|X_1 = 2)$.
d) Berechnen Sie alle invarianten Startverteilungen.

Loesung:
a) Es gibt zwei Klassen $\{1\}$ und $\{2, 3\}$.
b) Die Übergangsmatrix P ist

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

c) Es gibt zwei mögliche Wege der Laenge 2 vom Zustand 2 in den Zustand 3, naemlich denjenigen, der mit einem Sprung auf 3 beginnt und demjenigen, der mit einer Schleife in 2 beginnt. Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich als Summe, d.h.

$$P(X_3 = 3|X_1 = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16}.$$

Alternativ gilt $P(X_3 = 3|X_1 = 2) = (P^2)_{23}$, wobei

$$P^2 = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 4 & 21 & 39 \\ 0 & 28 & 36 \\ 0 & 27 & 47 \end{pmatrix}.$$

d) Eine invariante Startverteilung kann keine Masse auf den Zustand 1 legen, da aus diesem Masse nur abfliesst und keine zufliesst. Es reicht daher aus, die invarianten Startverteilungen der reduzierten Markov-Kette auf der Klasse $\{2, 3\}$ zu bestimmen. Die zugehoerige Uebergangsmatrix ist

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix},$$

und wir suchen einen Vektor (x, y) mit $(x, y) \cdot \tilde{P} = (x, y)$. Man bekommt als Loesungsschar $(x, y) = \lambda(\frac{3}{4}, 1)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, und wegen der Nebebedingung $x + y = 1$ ist $\lambda = 4/7$, dh. $(x, y) = (3/7, 4/7)$, dh. es gibt nur eine invarante Startverteilung $p = (0, 3/7, 4/7)$.