

**Juli – Klausur**  
Stochastik für Informatiker

Name: ..... Vorname: .....  
Matr.-Nr.: ..... Studiengang: .....

---

Füllen Sie bitte zuerst dieses Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, daß das Aufgabenblatt vollständig ist.

Schreiben Sie auf jedes von Ihnen benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Beginnen Sie bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Mit 25 Punkten ist die Klausur bestanden. Als Hilfsmittel darf – wie angekündigt – ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt benutzt werden. Es sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.

---

**Korrektur**

1	2	3	4	5	$\Sigma$

## 1. Aufgabe

10 Punkte

In einer Fabrik wird das gleiche Teil auf drei verschiedenen Maschinen A, B und C hergestellt. A produziert 50%, B und C jeweils 25% der Teile.

Bei Maschine A gibt es 2% Ausschuss, bei B 4% und bei C 8%.

1. Definiere sinnvolle Ereignisse zur Bearbeitung der Aufgabe und formuliere die gegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe dieser Ereignisse.
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein in der Fabrik produziertes Teil defekt?
3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein defektes Teil von Maschine A, B oder C?
4. Ein Test wurde entwickelt, um defekte Teile zu erkennen. 75% der defekten Teile werden von dem Test als defekt erkannt, ein Achtel der funktionierenden Teile werden fälschlicherweise als defekt erkannt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass der Test ein defektes Teil anzeigt.

## 2. Aufgabe

10 Punkte

In einer Urne befinden sich drei Kugeln beschriftet mit '1', '2' und '3'.

1. Es werden nacheinander drei Kugeln mit Zurücklegen aus der Urne gezogen.
  - (a) Gib einen möglichen Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Experiment an.
  - (b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten beiden Zügen keine '3' gezogen wurde.
  - (c) Sind die Ereignisse A: 'Die Summe der drei Kugeln ist 4' und B: 'die dritte Kugel zeigt eine zwei oder drei' unabhängig?
2. Es werden aus der Urne nun solange Kugeln mit Zurücklegen gezogen bis man das erste Mal eine '1' zieht. Bestimme für  $k = 1, 2, \dots$  die Wahrscheinlichkeit, dass in dem  $k$ -ten Zug gestoppt wird.

## 3. Aufgabe

10 Punkte

Eine Urne  $U$  beinhaltet drei Kugeln, jeweils mit '1' beschriftet, und eine Kugel mit '2' beschriftet. Es wird zunächst eine Kugel aus Urne  $U$  zufällig gezogen, der Wert der Kugel wird durch die Zufallsvariable  $X$  beschrieben. Dann wird dem Wert von  $X$  entsprechend oft unabhängig eine faire Münze geworfen. Es bezeichne  $Y$  die Anzahl an Köpfen, die geworfen wurden.

1. Beschreibe die gemeinsame Verteilung von  $X$  und  $Y$  in einer Tabelle.
2. Bestimme jeweils den Erwartungswert von  $X$  und  $Y$ .
3. Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig? Bestimme die Kovarianz  $\text{cov}(X, Y)$ .

#### 4. Aufgabe

10 Punkte

Es sei eine Markovkette mit der folgenden Übergangsmatrix gegeben.

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Zeichne den zugehörigen Graph.
2. Ist die Markovkette irreduzibel? Ist sie aperiodisch? Begründe!
3. Die Markovkette sei  $(X_i)_{i=0,1,\dots}$ . Es gelte  $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{2}$  und  $\mathbb{P}(X_0 = 3) = \frac{1}{2}$ . Bestimme die Verteilung von  $X_1$ .
4. Bestimme alle invarianten Verteilungen der Markovkette.
5. Nun starte die Markovkette in einer invarianten Verteilung. Was ist dann die Verteilung von  $X_5$ .

#### 5. Aufgabe

10 Punkte

1. Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} c(x-1)^2, & x \in [0, 2]; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimme die Konstante  $c$  so, daß  $f$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte darstellt. Berechne dann die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert der zugehörigen Verteilung.

2. Es sei  $X$  stetig gleichverteilt auf  $[0, 1)$ , das heißt, die Verteilungsfunktion von  $X$  ist gegeben durch

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t \end{cases}$$

Definiere die Zufallsvariable  $Y$  als  $Y = -\log(1 - X)$ . Bestimme die Verteilungsfunktion von  $Y$ . Welche bekannte stetige Verteilung hat  $Y$ ?