# Technische Universität Berlin

**Fakultät II – Institut für Mathematik** SoSe 11
**Dr. F. Aurzada** 7. Oktober 2011

## Oktober – Klausur

Stochastik für Informatiker

Name: ................................ Vorname: ................................

Matr.–Nr.: ........................... Studiengang: ...........................

---

Füllen Sie bitte zuerst dieses Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, daß das Aufgabenblatt vollständig ist (3 Seiten).

Schreiben Sie auf jedes von Ihnen benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Beginnen Sie bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Mit 25 Punkten ist die Klausur bestanden. Als Hilfsmittel darf – wie angekündigt – ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt benutzt werden. Es sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.

---

**Korrektur**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |

## 1. Aufgabe 10 Punkte

Ein Hersteller von Türen deckt seinen Bedarf an Schlössern zu 50% beim Hersteller A und zu je 25% bei den Herstellern B und C.

Aus Erfahrung weiß er, dass 2% der Schlösser von A, 4% bei B und 8% bei C defekt sind.

1. Definiere sinnvolle Ereignisse zur Bearbeitung der Aufgabe und formuliere die gegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe dieser Ereignisse.
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Schloss defekt.
3. Ein Schloss ist defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammte es von Hersteller A, B oder C?
4. Ein Test wurde entwickelt, um defekte Schlösser zu erkennen. 75% der defekten Schlösser werden von dem Test als defekt erkannt, ein Achtel der funktionierenden Schlösser werden fälschlicherweise als defekt erkannt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass der Test ein defektes Schloss anzeigt.

## 2. Aufgabe 10 Punkte

Es wird eine faire Münze mehrfach geworfen. Kopf soll als '1' und Zahl als '0' interpretiert werden.

1. Die Münze wird fünfmal geworfen.
   (a) Gib einen möglichen Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Experiment an.
   (b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, genau viermal Kopf zu werfen.
   (c) Sind die Ereignisse A:'Die Summe der Würfe beträgt 2.' und B:'Die ersten beide Würfe zeigen eine 0.' unabhängig?
2. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die Münze werde $n$ mal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe (Kopf:1, Zahl:0) genau $k$ ergibt für $0 \leq k \leq n$. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe mindestens zwei beträgt.

## 3. Aufgabe 10 Punkte

Urne $U_1$ beinhaltet drei Kugeln, jeweils mit '1' beschriftet, und eine Kugel mit '2' beschriftet. Urne $U_2$ beinhaltet zwei Kugeln mit '2' beschriftet und zwei Kugeln mit '4' beschriftet. Es wird zunächst eine Kugel aus Urne $U_1$ zufällig gezogen, der Wert der Kugel wird durch die Zufallsvariable $X$ beschrieben. Dann wird dem Wert von $X$ entsprechend oft mit Zurücklegen aus Urne $U_2$ gezogen. Es bezeichne $Y$ die Summe der Werte der Kugeln, die aus $U_2$ gezogen wurden.

1. Beschreibe die gemeinsame Verteilung von $X$ und $Y$ in einer Tabelle.
2. Bestimme jeweils den Erwartungswert von $X$ und $Y$.
3. Sind $X$ und $Y$ unabhängig? Bestimme die Kovarianz $\operatorname{cov}(X, Y)$.

## 4. Aufgabe

10 Punkte

Eine homogene Markovkette $(X_i)_{i=0,1,\ldots}$ auf dem Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$ habe folgende Übergangswahrscheinlichkeiten: $\mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X_1 = 3|X_0 = 2) = 1$, $\mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 3) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 3) = \frac{2}{3}$. Alle anderen Übergangswahrscheinlichkeiten seien Null.

1. Zeichne den zugehörigen Graphen.
2. Ist die Markovkette irreduzibel. Ist sie aperiodisch? Begründe!
3. Es sei die Startverteilung gegeben durch $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(X_0 = 2) = \frac{2}{3}$. Bestimme die Verteilung von $X_1$.
4. Bestimme alle invarianten Verteilungen.
5. Nun starte die Markovkette in einer invarianten Verteilung. Was ist dann die Verteilung von $X_3$.

## 5. Aufgabe

10 Punkte

1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sei gegeben durch

   $$f(x) = \begin{cases} c\frac{1}{x}, & x \in [1, 4]; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Bestimme die Konstante $c$ so, daß $f$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte darstellt. Berechne dann die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert der zugehörigen Verteilung. Erinnerung: Es gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x} = \ln x$.

2. Es sei $X$ exponential-verteilt mit Parameter 1, d.h. für $t \geq 0$ gilt $\mathbb{P}(X \leq t) = 1 - e^{-t}$, für $t < 0$ ist die Wahrscheinlichkeit Null. Definiere die Zufallsvariable $Y$ als $Y = e^{-X}$. Bestimme die Verteilungsfunktion von $Y$. Welche Verteilung hat $Y$?