Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. Marcel Ortgiese

SoSe 12
20. Juli 2012

Juli – Klausur

Stochastik für Informatiker

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst dieses Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt vollständig ist.

Schreiben Sie auf jedes von Ihnen benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Beginnen Sie bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Mit 25 Punkten ist die Klausur bestanden. Als Hilfsmittel darf – wie angekündigt – ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt benutzt werden. Es sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** oder eine kurze Begründung an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe 10 Punkte

(i) In 2/3 der Fällen sagt die Wettervorhersage für den nächsten Tag schönes, sonst schlechtes Wetter voraus. Wenn die Vorhersage 'schön' lautete, ist es auch am nächsten Tag mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% schön, wenn die Vorhersage 'schlecht' lautete, ist es am nächsten Tag mit Wahrscheinlichkeit von 50% schlecht.

  (a) Definieren Sie sinnvolle Ereignisse zur Bearbeitung der Aufgabe und bestimmen Sie die gegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe dieser Ereignisse.

  (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass morgen schlechtes Wetter ist.

  (c) Heute ist schönes Wetter. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde dies in dem gestrigen Wetterbericht angekündigt?

(ii) In einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ seien Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$ gegeben. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A \cup B | A \cap B)$.

2. Aufgabe 10 Punkte

In einer Urne befinden sich drei rote und zwei blaue Kugeln.

(i) Es wird nacheinander zweimal ohne Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie einen möglichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$.

A_1 bezeichne das Ereignis, dass die erste Kugel rot ist, A_2 beschreibe, dass die zweite Kugel rot ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten von A_1 und A_2. Sind A_1 und A_2 unabhängig (mit Begründung)?

(ii) Es wird solange ohne Zurücklegen gezogen, bis zum ersten Mal eine blaue Kugel gezogen wurde. Die Zufallsvariable Z beschreibe die Anzahl an Zügen, die benötigt wurden. Bestimmen Sie die Verteilung von Z.

(iii) Nun wird solange mit Zurücklegen gezogen, bis zum ersten Mal eine blaue Kugel gezogen wurde. Welche Verteilung hat Z nun?

3. Aufgabe 10 Punkte

Es sei eine homogene Markovkette auf dem Zustandsraum $\{1, 2, 3\}$ mit der folgenden Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(i) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen.

(ii) Die Markovkette starte in Zustand 2. Bestimmen Sie die Verteilung der Markovkette jeweils nach einem und nach zwei Schritten.

(iii) Ist die Markovkette irreduzibel? Ist sie aperiodisch? Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

(iv) Bestimmen Sie die invariante Verteilung.

(v) Die Markovkette sei $(X_i)_{i=0,1,\ldots}$ und starte wieder in Zustand 2. Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$. Was ist der Wert dieses Grenzwertes, wenn die Markovkette stattdessen in Zustand 1 startet.

4. Aufgabe 10 Punkte

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei für $c \geq 0$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} cx + 1, & x \in [-1, 0]; \\ -cx + 1, & x \in [0, 1]; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Skizzieren Sie f.

(ii) Bestimmen Sie $c \geq 0$ so, dass es sich bei f um eine Dichte handelt.

(iii) Es sei nun X eine Zufallsvariable mit dieser Dichte. Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X)$.

(iv) Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(|X| > 0.5)$.

(v) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $|X|$.

5. Aufgabe 10 Punkte

Es wird eine Münze einmal geworfen. Die Zufallsvariable X ist 1, wenn beim ersten Wurf Zahl geworfen wurde, sonst hat X den Wert 0. Falls 'Kopf' geworfen wurde, wird die Münze danach noch einmal geworfen. Falls 'Zahl' geworfen wurde, wird sie noch zweimal geworfen. Y gibt an, wie oft 'Zahl' in dem zweiten Durchgang geworfen wurde.

(i) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y in einer Tabelle.

(ii) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ sowie $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(iii) Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.