Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. Marcel Ortgiese

SoSe 12
08. Oktober 2012

Oktober – Klausur
Stochastik für Informatiker

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst dieses Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt vollständig ist.

Schreiben Sie auf jedes von Ihnen benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Beginnen Sie bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Mit 25 Punkten ist die Klausur bestanden. Als Hilfsmittel darf – wie angekündigt – ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt benutzt werden. Es sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** oder eine kurze Begründung an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe 10 Punkte

(i) Es werden die Zeichen 0 und 1 übertragen. In 2/3 aller Fälle wird eine 0, sonst eine 1 gesendet. Die Übertragung ist fehlerbehaftet. Wenn eine 1 gesendet wurde, wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% auch eine 1 empfangen. Wenn eine 0 gesendet wurde, wird nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% auch eine 0 empfangen.

(a) Definieren Sie sinnvolle Ereignisse zur Bearbeitung der Aufgabe und bestimmen Sie die gegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe dieser Ereignisse.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine 1 empfangen wird.

(c) Eine 1 wurde empfangen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde auch eine 1 gesendet.

(ii) In einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ seien Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B) > 0$ gegeben. Gilt dann für jedes Ereignis $C \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}(C) > 0$ auch $\mathbb{P}(A|C) > \mathbb{P}(B|C)$? Beweisen Sie die Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

2. Aufgabe 10 Punkte

(i) Es wird dreimal gewürfelt. Bestimmen Sie einen möglichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$.

A_1 bezeichne das Ereignis, dass die Summe der ersten beiden Würfe drei beträgt. A_2 beschreibe das Ereignis, dass die Summe der letzten beiden Würfe vier beträgt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten von A_1 und A_2. Sind A_1 und A_2 unabhängig (mit Begründung)?

(ii) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, drei unterschiedliche Zahlen zu würfeln Bestimmen Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit, zwei Sechsen und eine Eins zu würfeln.

(iii) Nun wird sogar zehnmal gewürfelt. Die Zufallsvariable Z gibt an, wie oft eine Eins gewürfelt wurde. Bestimmen Sie die Verteilung von Z.

3. Aufgabe 10 Punkte

Es sei eine homogene Markovkette $(X_i)_{i=0,1,\ldots}$ auf dem Zustandsraum $\{1, 2, 3\}$ mit den folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben.

$$\begin{array}{lll}
\mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 1) = 1/4 & \mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 1) = 1/4 & \mathbb{P}(X_1 = 3|X_0 = 1) = 1/2 \\
\mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 2) = 1/2 & \mathbb{P}(X_1 = 3|X_0 = 2) = 1/2 & \\
\mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 3) = 1/4 & \mathbb{P}(X_1 = 3|X_0 = 3) = 3/4 &
\end{array}$$

(i) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen.

(ii) Die Markovkette starte in Zustand 2. Bestimmen Sie die Verteilung der Markovkette jeweils nach einem und nach zwei Schritten.

(iii) Ist die Markovkette irreduzibel? Ist sie aperiodisch? Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

(iv) Bestimmen Sie die invariante Verteilung.

(v) Bestimmen Sie eine Anfangsverteilung, so dass die Markovkette nach einem Schritt die Verteilung $(3/8, 1/8, 1/2)$ hat.

4. Aufgabe 10 Punkte

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei für $c \geq 0$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} cx, & x \in [0, 2]; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Skizzieren Sie f.

(ii) Bestimmen Sie $c \geq 0$ so, dass es sich bei f um eine Dichte handelt.

(iii) Es sei nun X eine Zufallsvariable mit dieser Dichte. Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X)$ sowie $\mathbb{V}(X)$.

(iv) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X^2.

5. Aufgabe 10 Punkte

Es wird einmal gewürfelt. X gibt die geworfene Zahl an. Wenn der Würfel eine Zahl kleiner oder gleich drei zeigt, wird eine Münze geworfen, sonst werden zwei Münzen geworfen. Y gibt an, wie oft 'Kopf' geworfen wurde.

(i) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y in einer Tabelle.

(ii) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ sowie $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(iii) Bestimmen Sie die Verteilung von dem Produkt der Zufallsvariablen XY.