Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. Noemi Kurt/Dr. Selim Gökay

SoSe 2013
18. Juli 2013

Lösungen zur Juli-Klausur Stochastik für Informatiker

Aufgabe 1 **10 Punkte**

(a) $A :=$ {Arzt A behandelt den Patienten}, $B :=$ {Arzt B behandelt den Patienten}, $C :=$ {Arzt C behandelt den Patienten}, $D :=$ {Diagnose ist falsch}.
$\mathbb{P}(A) = 0.2, \mathbb{P}(B) = 0.3, \mathbb{P}(C) = 0.5$
$\mathbb{P}(D|A) = 0.04, \mathbb{P}(D|B) = 0.02, \mathbb{P}(D|C) = 0.05$. Beachte: Gefordert war die Berechnung der im Text *gegebenen* Wahrscheinlichkeiten.

(b) Mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit erhält man

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D|C)\mathbb{P}(C) = \frac{39}{1000}.$$

(c) $P(A|D) = \frac{\mathbb{P}(A\cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{0.2\cdot 0.04}{0.039} = \frac{8}{39}$,
ebenso folgt $\mathbb{P}(B|D) = ... = \frac{6}{39}, \mathbb{P}(C|D) = ... = \frac{25}{39}$.

Aufgabe 2 **10 Punkte**

(a)

$Y \setminus X$	0	1	2	Σ
0	0.2	0.4	0	0.6
1	0.1	0	0.3	0.4
Σ	0.3	0.4	0.3	1

(b) $\mathbb{E}[X] = 0\mathbb{P}(X = 0) + 1\mathbb{P}(X = 1) + 2\mathbb{P}(X = 2) = 0 + 0.4 + 2 \cdot 0.3 = 1$,
ebenso folgt $\mathbb{E}[Y] = ... = 0.4$.
$\mathrm{var}(X) = (0-1)^2\mathbb{P}(X = 0) + (1-1)^2\mathbb{P}(X = 1) + (2-1)^2\mathbb{P}(X = 2) = 0.6$,
$\mathrm{var}(Y) = ... = 0.24$.
(alternativer Rechnungsweg für Varianz über Berechnung von $\mathbb{E}[X^2]$ möglich).

(c) Es gilt $\mathbb{P}(Y = 0) = 0.6$. Deshalb erhält man aus der Definition der bedingten Verteilung, und durch Ablesen der Tabelle,

$$\mathbb{P}(X = 0|Y = 0) = \frac{\mathbb{P}(X = 0 \wedge Y = 0)}{\mathbb{P}(Y = 0)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X = 1|Y = 0) = ... = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{P}(X = 2|Y = 0) = ... = 0.$$

(d) Es gilt $\mathbb{E}[XY] = 0\mathbb{P}(X = 0 \text{ oder } Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + 2\mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = 0 + 2 \cdot 0.3 = 0.6$ Somit folgt mit (b)

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0.6 - 0.4 = 0.2$$

Aufgabe 3 **10 Punkte**

(a) (Skizze)

(b) Die Markov-Kette ist irreduzibel, da man mit positiver Wahrscheinlichkeit von jedem Zustand in jeden anderen gelangen kann. Gute Pfade sind z.B. $1 \to 1, 1 \to 2, 1 \to 2 \to 3, 1 \to 1, 2 \to 1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 2 \to 1, 3 \to 2, 3 \to 2 \to 3$.
Die Kette ist aperiodisch, da $J_1 = \{1, 2, ...\}$, d.h. $ggT(J_1) = 1$, ebenso sieht man $ggT(J_2) = ggT(J_3) = 1$.

(c) Mit $\mu^{(0)} = (0, 0, 1)$ folgt durch Matrixmultiplikation oder durch Berechnung mit Hilfe der Skizze

$$\mu^{(1)} = \mu^{(0)}P = (0, 1, 0), \quad \mu^{(2)} = \mu^{(1)}P = (1/2, 0, 1/2).$$

(d) Gesucht sind nicht-negative Lösungen des Gleichungssystems $(P^T - I)\pi = 0, \sum_{i=1}^3 \pi_i = 1$. Lösung mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (oder ähnlicher Methode) führt auf

$$\pi = (3/9, 4/9, 2/9).$$

Diese Lösung ist eindeutig, da das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, bzw. weil irreduzible und aperiodische Markovketten mit endlichem Zustandsraum eine eindeutige stationäre Verteilung haben.

(e) Da die Kette irreduzibel und aperiodisch ist, folgt gemäß Konvergenzsatz aus der Vorlesung, dass die Verteilung der Kette zum Zeitpunkt n gegen die invariante Verteilung konvergiert,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \pi(x)$$

für $x \in \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 4 **10 Punkte**

(a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}^3, |\Omega| = 4^3 = 64, \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{64}, \omega \in \Omega$.

(b) $A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (3, 1, 1), (1, 1, 3), (1, 3, 1)\}$, $|A| = 10$. Da es sich um einen Laplace-Raum handelt, ist $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = 10/64 = 5/32$.
Es gilt $B^c = 3^3 = 27$. Somit ist $\mathbb{P}(B) = 1 - 27/64 = 37/64$.
Es gilt $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{64} \neq \frac{10 \cdot 37}{64^2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, somit sind die Ereignisse nicht unabhängig.

(c) Die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl größer als 2 zu ziehen ist in jedem Zug 1/2. Somit ist T geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit 1/2, also $\mathbb{P}(T = k) = 1/2^{k-1} \cdot 1/2 = 1/2^k$.

(d) Z_n ist binomialverteilt mit Parameter $n, 1/4$, d.h. mit $X_1, X_2, ...$ u.i.v Ber(1/4)-verteilten Zufallsvariablen gilt $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Da $\mathbb{E}[X_i] = 1/4$ folgt mit dem Gesetz der großen Zahlen

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 5 **10 Punkte**

(a) Es müssen die beiden Bedingungen $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ und $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = 0$ erfüllt sein. Berechnung der Integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c_1 \int_1^{\infty} x^{-3}dx + c_2 \int_{-\infty}^{-1} x^{-4}dx = c_1(-\frac{1}{2x^2})_1^{\infty} + c_2(-\frac{1}{3x^3})_{-\infty}^{-1} = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = c_1 \int_1^{\infty} x^{-2}dx + c_2 \int_{-\infty}^{-1} x^{-3}dx = c_1(-\frac{1}{x})_1^{\infty} + c_2(-\frac{1}{2x^2})_{-\infty}^{-1} = c_1 - \frac{c_2}{2}.$$

Lösen des LGLS $c_1/2 + c_2/3 = 1, c_1 - c_2/2 = 0$ führt auf $c_1 = 6/7, c_2 = 12/7$.

(b)

$$\mathbf{P}\left(|X| \geq 2\right) = \mathbb{P}(X \leq -2) + \mathbb{P}(X \geq 2) = \int_{-\infty}^{-2} \frac{12}{7}\frac{1}{x^4}dx + \int_2^{\infty} \frac{6}{7}\frac{1}{x^3}dx = (-\frac{4}{7x^3})_{-\infty}^{-2} + (-\frac{3}{7x^2})_2^{\infty} = \frac{5}{28}.$$

(c) Nach Definition ist $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$. Fallunterscheidung: Für $t < -1$,

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{12}{7x^4}dx = -\frac{4}{7t^3},$$

für $-1 < t < 1$ gilt

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{12}{7x^4}dx = \frac{4}{7},$$

für $1 \leq t$ gilt

$$F_X(t) = \frac{4}{7} + \int_1^{\infty} \frac{6}{7x^3}dx = 1 - \frac{3}{7t^2}.$$

Gesamtpunktzahl: 50 Punkte