Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. Noemi Kurt/Dr. Selim Gökay

SoSe 2013
7. Oktober 2013

Oktober-Klausur

Stochastik für Informatiker

Vorname: .... Name: ....

Matrikel-Nr. .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst dieses Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt vollständig ist.

Schreiben Sie auf jedes von Ihnen benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Beginnen Sie bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Mit 25 Punkten ist die Klausur bestanden. Als Hilfsmittel darf – wie angekündigt – ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt benutzt werden. Es sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und/oder eine vollständige Begründung an. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1 **10 Punkte**

In einer Firma wird ein Werkstück von drei verschiedenen Maschinen produziert. Eine Lieferung enthält insgesamt 200 Werkstücke, für die gilt: 80 Werkstücke wurden von Maschine A produziert, davon sind 2 defekt, 50 wurden von Maschine B produziert, davon ist eines defekt, und 70 wurden von Maschine C produziert, davon sind 3 defekt. Wir wählen aus der Lieferung zufällig ein Werkstück aus, und betrachten die folgenden Ereignisse:

$$A := \{\text{das Werkstück wurde von Maschine A produziert}\},$$

$$B := \{\text{das Werkstück wurde von Maschine B produziert}\},$$

$$C := \{\text{das Werkstück wurde von Maschine C produziert}\},$$

$$D := \{\text{das Werkstück ist defekt}\}.$$

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)$ und $\mathbb{P}(C)$, sowie $\mathbb{P}(D|A), \mathbb{P}(D|B), \mathbb{P}(D|C)$. Was bedeutet $\mathbb{P}(D|A)$ in Worten ausgedrückt?

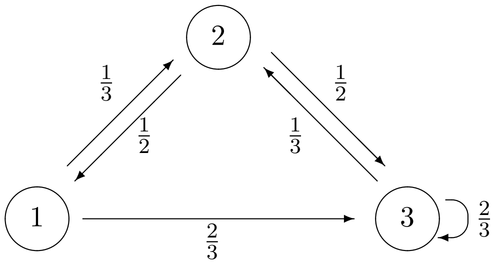
(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig aus der Lieferung gezogenes Werkstück defekt?

(c) Ein zufällig aus der Lieferung gezogenes Werkstück ist defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es von Maschine A, bzw. von Maschine B, bzw. Maschine C?

(d) In obiger Firma wird ein Test verwendet, welcher ein defektes Teil mit 80% Wahrscheinlichkeit erkennt, mit 10% Wahrscheinlichkeit wird bei dem Test ein funktionierendes Teil fälschlich für defekt gehalten. Ein zufällig ausgewähltes Werkstück aus obiger Lieferung wird getestet. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test "defekt" anzeigt?

Aufgabe 2 **10 Punkte**

Es sei eine homogene Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $\{1, 2, 3\}$ gegeben, deren Übergangswahrscheinlichkeiten in der folgenden Skizze angegeben sind:



(a) Geben Sie die Übergangsmatrix dieser Markov-Kette an.

(b) Ist die Markov-Kette irreduzibel? Ist sie aperiodisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Die Markov-Kette startet im Zustand 2, d.h. $\mathbb{P}(X_0 = 2) = 1$. Bestimmen Sie die Verteilung von X_1 und von X_2.

(d) Bestimmen Sie eine invariante Verteilung der Markov-Kette. Ist diese eindeutig?

(e) Nun starte die Markov-Kette in einer invarianten Verteilung. Was ist in diesem Fall die Verteilung von X_8? (Begründe).

Aufgabe 3 **10 Punkte**

Eine Urne entält 4 Bälle, nummeriert von 1 bis 4. Es wird ein Ball zufällig *ohne* Zurücklegen gezogen, und der Wert des Balles wird mit X bezeichnet. Falls $X \leq 2$ ist, wird noch ein zweites Mal gezogen. Mit Y wird der Wert des zweiten Balles bezeichnet. Falls kein zweiter Ball gezogen wird, setzen wir $Y = 0$.

(a) Beschreiben Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y in einer Tabelle.

(b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte von X und Y.

(c) Sind X und Y unabhängig? Bestimmen Sie $\mathrm{cov}(X, Y)$.

(d) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X gegeben $Y \neq 0$.

Aufgabe 4 **10 Punkte**

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1, \\ c_2 & \text{falls } -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstanten c_1 und c_2, so dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, und die zugehörige Verteilung den Erwartungswert 0 hat.

(b) Berechnen Sie die Varianz einer Zufallsvariablen, deren Verteilung die Dichte f hat.

(c) Skizzieren Sie die Dichte f und die zu f gehörige Verteilungsfunktion F.

Aufgabe 5 **10 Punkte**

(a) Eine Urne entält 8 Kugeln, davon sind 2 rot, 3 blau und 3 gelb. Wir ziehen daraus zufällig eine Kugel. Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ für dieses Experiment an.

(b) Aus der in (a) beschriebenen Urne wird nun drei Mal *mit* Zurücklegen gezogen. Wir bezeichnen mit A das Ereignis, dass die erste gezogene Kugel rot ist, und mit B das Ereignis, dass mindestens 2 blaue Kugeln gezogen werden. Berechnen Sie $\mathbb{P}(A)$ und $\mathbb{P}(B)$. Sind A und B unabhängig?

(c) Berechnen Sie in der Situation von (b) die Wahrscheinlichkeit, dass alle gezogenen Kugeln dieselbe Farbe haben, und die Wahrscheinlichkeit, dass alle genzogenen Kugeln unterschiedliche Farben haben.

(d) Nun enthält die Urne 200 Kugeln, wobei 10 davon blau sind. Es wird n Mal mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable Z gibt an, wie viele blaue Kugeln gezogen werden. Bestimmen Sie die Verteilung von Z.

(e) In der Situation von (d) soll $n = 100$ sein. Welche Möglichkeiten gibt es, die Verteilung von Z näherungsweise zu berechnen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Gesamtpunktzahl: 50 Punkte