Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Dr. Noemi Kurt/Dr. Selim Gökay

SoSe 2014
31. Juli 2014

Juli-Klausur

Stochastik für Informatiker

Vorname: .... Name: ....

Matrikel-Nr. .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst dieses Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt vollständig ist.

Schreiben Sie auf jedes von Ihnen benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Beginnen Sie bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Mit 25 Punkten ist die Klausur bestanden. Als Hilfsmittel darf – wie angekündigt – ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt benutzt werden. Es sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und/oder eine vollständige Begründung an. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1 **10 Punkte**

Auf einem kleinen Flughafen fliegen 60% aller Passagiere mit einer großen Fluggesellschaft, 10% mit privatem Flugzeug und der Rest fliegt mit einer kleinen Fluglinie. Von den Passagieren, die mit einer großen Fluggesellschaft fliegen, reisen 60% geschäftlich, von den Passagieren die mit privatem Flugzeug fliegen, sind 90% geschäftlich unterwegs, während 10% der Passagiere, die eine kleine Fluglinie gewählt haben, geschäftlich reisen.

(a) Definieren Sie sinnvolle Ereignisse zur Bearbeitung dieser Aufgabe, und formulieren Sie die im Text gegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe dieser Ereignisse.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein auf diesem Flughafen zufällig ausgewählter Passagier auf Geschäftsreise?

(c) Gegeben dass ein Passagier auf Geschäftsreise ist, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass dieser Passagier mit einer großen Fluglinie, mit privatem Flugzeug, oder mit einer kleinen Fluglinie fliegt.

Aufgabe 2 **10 Punkte**

Es seien X und Y Zufallsvariablen, deren gemeinsame Verteilung gemäß folgender Tabelle gegeben ist:

$Y \backslash X$	0	1	2	Σ
0	1/12	1/6	1/4	
1	1/6	1/3	0	
Σ				

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$ sowie $\text{var}(X)$ und $\text{var}(Y)$. Berechnen Sie außerdem die bedingte Verteilung von X gegeben $Y = 1$.

(b) Berechnen Sie $\text{cov}(X, Y)$, und entscheiden Sie (mit Begründung), ob X und Y unabhängig sind.

(c) Es seien X und Y Zufallsvariablen, deren gemeinsame Verteilung gemäß folgender unvollständiger Tabelle gegeben ist:

$Y \backslash X$	0	1	2	Σ
1	1/2			
2			0	1/4
Σ		1/4		

Vervollständigen Sie die Tabelle, falls $\mathbb{E}[X] = 3/4$.

Aufgabe 3 **10 Punkte**

Sei

$$\mathbf{P}_\theta(X = x) := (1 - \theta)^{x-1}\theta, \quad x \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$$

die Verteilungsfunktion einer geometrischen Zufallsvariable X mit unbekanntem $\theta \in (0, 1)$.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.

(b) Ist dieser Maximum-Likelihood-Schätzer konsistent? Begründen Sie.

Aufgabe 4 **10 Punkte**

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markov Kette mit Zustandsraum $S = \{1,2,3\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie die Markov-Kette graphisch dar und bestimmen Sie (mit Begründung), ob sie irreduzibel und aperiodisch ist.

(b) Finden Sie alle invarianten Verteilungen der Markov-Kette.

(c) Die Markov-Kette hat die Startverteilung $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 2) = 1/2$. Berechnen Sie die Verteilung von X_{100}.

(d) Ist die Grenzverteilung $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\nu(X_n = x), x \in S$, der Kette unabhänging von der Startverteilung ν? Falls ja, begründen Sie, falls nein, geben Sie zwei verscheidene Grenzverteilungen für zwei verschiedene Startverteilungen an.

Aufgabe 5 **10 Punkte**

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ sei gegeben durch

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} c(x_1+x_2) & \text{falls} \quad 0 \le x_1 \le 1, \quad 0 \le x_2 \le 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c so, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Sei $X = (X_1, X_2)$ ein Zufallsvektor mit Dichte f. Berechnen Sie $\mathbb{P}(X_1 < 1/2, X_2 > 1/2)$.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswerte $\mathbb{E}[X_1]$ und $\mathbb{E}[X_2]$.

(d) Berechnen Sie die Kovarianz $\mathrm{cov}(X_1, X_2)$. Sind X_1 und X_2 unabhängig?

Gesamtpunktzahl: 50 Punkte