TU Berlin, Institut für Mathematik
SoSe 15

Prof. Dr. Noemi Kurt
Dr. Mathias Rafler

Stochastik für Informatik (9LP)
Klausur

29. Juli 2015

Name ________________________________ Matrikelnummer ____________________

Vorname ______________________________ Studiengang ____________________

Informationen

Füllen Sie bitte zuerst das Deckbaltt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt vollständig ist.

Schreiben Sie auf *jedes* von Ihnen benutzte Papier *sofort* Ihren Namen und Ihr Matrikelnummer. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Mit 25 Punkten ist die Klausur bestanden. Als Hilfsmittel darf, wie angekündigt, ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt benutzt werden. Weitere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.

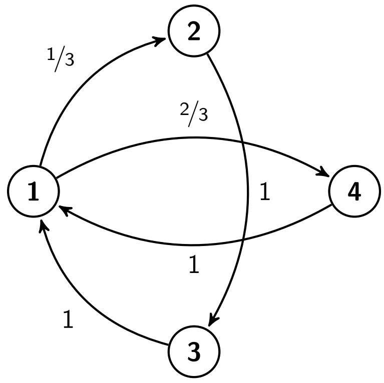
Geben Sie stets den *vollständigen* Rechenweg an. Begründen Sie Ihre Schritte falls notwendig.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1 *10 Punkte*

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit dem nebenstehend gegebenen Übergangsgraphen und Startverteilung $\nu = (1/3, 0, 1/3, 1/3)$.



(a) Geben Sie die Übergangsmatrix P an und berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(i) $\mathbb{P}_\nu(X_2 = 3)$

(ii) $\mathbb{P}_\nu(X_1 = 2, X_2 = 3)$

(b) Welchen Aussagen können Sie über Irreduzibilität und Periodizität dieser Markovkette treffen? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

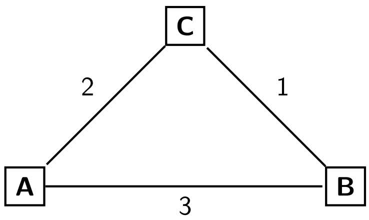
(c) Berechnen Sie die invariante Verteilung der Markovkette sowie

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n,$$

und begründen Sie ggf. Ihre Antwort.

Aufgabe 2 *10 Punkte*

Gegeben sei der nebenstehende Graph mit den Ecken A, B und C sowie den Kanten 1, 2 und 3. Jede der Kanten kann nun unabhängig von allen anderen mit Wahrscheinlichkeit p offen sein, andernfalls ist sie blockiert. Es seien für $i = 1, 2, 3$, A_i das Ereignis, dass Kante i offen ist,



$$X_i := 1_{A_i}, \qquad S := \sum_{j=1}^{3} X_j,$$

sowie V das Ereignis, dass es eine Verbindung aus offenen Kanten von A nach C gibt.

(a) Bestimmen Sie $S(\Omega)$ und $\mathbb{E}[S]$.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(V|X_i = 0)$ für $i = 1, 2, 3$ sowie $\mathbb{P}(V)$.

(c) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(S = 1|V)$.

Aufgabe 3 *10 Punkte*

Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) := \begin{cases} c \cdot x & \text{falls } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $c > 0$ die Konstante ist, welche aus f eine Dichte macht.

(a) Bestimmen Sie die Konstante c, berechnen Sie $\mathbb{E}X$, und zeigen Sie, dass $\mathbb{E}X^2 = 1/2$ gilt.

(b) Berechnen Sie die Dichte von $Y := X^2$.

(c) Berechnen Sie $\operatorname{Var} X$ und $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

Aufgabe 4 *10 Punkte*

Sei $\mu \in \mathbb{R}$ ein unbekannter Parameter, und seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Dichte

$$f_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} .$$

(a) Berechnen Sie die zugehörige log-Likelihoodfunktion. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\bar{\mu}$ für μ.

(b) Was können Sie über Konsistenz und Erwartungstreue von $\bar{\mu}$ aussagen?

Aufgabe 5 *10 Punkte*

(a) In einer Studie wird die Wirkung zweier Behandlungen A und B an insgesamt 100 Probanden untersucht. In der Tabelle ist aufgelistet, wie viele Probanden durch die jeweilige Behandlung, A bzw. B, geheilt wurden, bzw. nicht geheilt wurden. Mittels eines χ^2-Tests zum Fehlerniveau $\alpha = 0.05$ soll getestet werden, ob der Behandlungserfolg (d.h. geheilt oder nicht geheilt) von der Wahl der Behandlung, also A oder B, abhängt.

	A	B	Σ
geheilt	45	25	
nicht geheilt	15	15	
Σ			

(i) Formulieren Sie eine geeignete Nullhypothese, und stellen Sie die Tabelle der theoretischen Häufigkeiten auf. (Den Testwert χ^2 brauchen Sie **nicht** zu berechnen.)

(ii) Mit den obigen Zahlen ergibt sich ein Testwert von $\chi^2 = 1.79$. (Sie brauchen dies **nicht** nachzurechnen.) Was kann man daraus für die Nullyhpothese aussagen?

(b) Geben Sie bei jeder der folgenden Aussagen an, ob sie **wahr oder falsch** ist. Eine Begründung ist bei diesem Aufgabenteil **nicht** notwendig.

(i) Durch wiederholtes Ausführen eines Las-Vegas-Algorithmus läßt sich ein Monte-Carlo-Algorithmus konstruieren.

(ii) Sind $U_1, U_2, \ldots, U_n$ unabhängige und uniform auf $[0, 1]$ verteilte Zufallsvariablen, so ist $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{U_k^2}$ ein Monte-Carlo-Schätzer für $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\, \mathrm{d}x$.

(iii) Sei X geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0, 1)$. Dann gilt $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{1}{p \cdot a}$.

(iv) Der Metropolis-Algorithmus springt in jedem Schritt in einen Zustand mit höherem Gewicht der invarianten Verteilung π.

(v) Der randomisierte Quicksort-Algorithmus ist ein Las-Vegas-Algorithmus und terminiert mit Wahrscheinlichkeit 1.

Tabelle: Quantile $\chi^2_{\beta,f}$ der χ^2-Verteilung für die Freiheitsgrade $f = 1, 2, 3, 4$ und Signifikanzniveaus $\beta \in \{0.01, 0.05, 0.95, 0.99\}$.

Freiheitsgrad f	$\chi^2_{0.01,f}$	$\chi^2_{0.05,f}$	$\chi^2_{0.95,f}$	$\chi^2_{0.99,f}$
$f = 1$	0.00016	0.0039	3.842	6.635
$f = 2$	0.0201	0.1026	5.991	9.210
$f = 3$	0.1148	0.3518	7.815	11.34
$f = 4$	0.2971	0.7107	9.488	13.28