Stochastik für Informatiker (alt), (6LP)

Klausur

07. Oktober 2015

Name ______________________ Matrikelnummer ______________

Vorname ______________________ Studiengang ______________

Informationen

Füllen Sie bitte zuerst das Deckbaltt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt vollständig ist.

Schreiben Sie auf *jedes* von Ihnen benutzte Papier *sofort* Ihren Namen und Ihr Matrikelnummer.

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Mit 25 Punkten ist die Klausur bestanden. Als Hilfsmittel darf, wie angekündigt, ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt benutzt werden. Weitere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.

Geben Sie stets den *vollständigen* Rechenweg an. Begründen Sie Ihre Schritte falls notwendig.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1 *10 Punkte*

Eine Fluggesellschaft unterscheidet ihre Passagiere in Geschäftsreisende und Freizeitflieger, und beobachtet, dass ein Geschäftsreisender mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.08 nicht zu seinem Flug erscheint, ein Freizeitflieger mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.03. Auf einem Flug am Sonntag abend sind 20% der Passagiere Geschäftsreisende, die 200 Plätze in dem Flugzeug sind ausgebucht.

(a) Geben Sie geeignete Ereignisse zur Modellierung des Problems an.

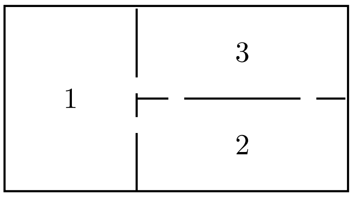
(b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähler Passagier nicht zum Flug erscheint?

(c) Angenommen ein Passagier erscheint nicht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dieser Passagier ein Geschäftsreisender, mit welcher ein Freizeitflieger?

(d) Wie hoch ist die erwartete Anzahl an Plätzen, die frei bleiben?

Aufgabe 2 *10 Punkte*

Eine Maus läuft durch eine Wohnung mit dem nebenstehenden Grundriß. Dabei entscheidet sie sich, unabhängig davon, woher sie kam, zu jedem Zeitpunkt mit gleicher Wahrscheinlichkeit für eine der aus diesem Raum hinausführenden Türen und läuft durch diese. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ die Position der Maus zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$, wobei sie in Raum 2 oder 3 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ startet.



(a) Geben Sie den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix P von $(X_n)_{n\geq 0}$ an, und berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten (ν bezeichne die Startverteilung):

   (i) $\mathbb{P}_\nu(X_1 = 1, X_2 = 3)$

   (ii) $\mathbb{P}_\nu(X_2 = 3, X_3 = 2 | X_1 = 1)$

(b) Berechnen Sie die invariante Verteilung der Markovkette.

(c) Zu einem sehr späten Zeitpunkt kommt eine Katze in den Raum 2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft sie dort zu genau diesem Zeitpunkt auf die Maus?

Aufgabe 3 *10 Punkte*

Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} c & \text{falls } -1 \leq x \leq 0 \\ d \cdot x & \text{falls } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $c > 0$ und $d > 0$ zwei geeignete Konstanten sind.

(a) Berechnen Sie die Fläche unter dem Graphen von f in Abhängigkeit von c und d.

(b) Bestimmen Sie c und d derart, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist und $\mathbb{E}X = 0$ gilt.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X)$.

Aufgabe 4 *10 Punkte*

(a) Gegeben sei die unvollständige Tabelle der gemeinsamen Verteilung der Zufallsvariablen V und W:

W \ V	1	2	3	4	Σ
-1			0	0	1/4
0	1/8	1/8	1/8	1/8	
1	0	0			
Σ	1/4		1/4		

Vervollständigen Sie die Tabelle und berechnen Sie $\mathbb{E}V$, $\mathbb{E}W$ sowie $\operatorname{Cov}(V, W)$.

(b) Geben Sie bei jeder der folgenden Aussagen an, ob sie **wahr oder falsch** ist. Eine Begründung ist bei diesem Aufgabenteil **nicht** notwendig.

(i) Sind X und Y unabhängig, so ist $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$,

(ii) Falls X und Y nicht unabhängig sind, so ist $\operatorname{Cov}(X, Y) \neq 0$.

(iii) Gilt $\mathbb{E}X = 0$, so ist $\operatorname{Var}(X) = 0$.

(iv) Je größer die Varianz, umso größer ist der Erwartungswert.

(v) Die Korrelation liegt stets zwischen 0 und 1.

Aufgabe 5 *10 Punkte*

Seien $p \in (0, 1)$ und X eine diskrete Zufallsvariable mit Wertebereich $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ sowie durch

$$p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = p^2, \qquad p_X(2) = \mathbb{P}(X = 2) = (1 - p)^2$$

gegebener Verteilung. Sei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Stichprobe dieser Zufallsvariable.

(a) Berechnen Sie $p_X(3)$.

(b) Für $k \in \{1, 2, 3\}$ sei $H(k) := |\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} : x_i = k\}|$ die absolute Häufigkeit des Wertes k in der Stichprobe. Zeigen Sie, dass die Likelihoodfunktion gegeben ist durch

$$L(x_1, \ldots, x_n; p) = p^{2H(1)} \cdot (1 - p)^{2H(2)} \cdot (2p - 2p^2)^{H(3)}.$$

(c) Gegeben Daten $(x_1, \ldots, x_{10}) = (2, 1, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 1, 3)$, berechnen Sie $H(k)$ für $k = 1, 2, 3$ und den Maximum-Likelihood-Schätzer für diesen Datensatz.