TU Berlin, Institut für Mathematik
SoSe 16

Prof. Dr. Noemi Kurt
Dr. Mathias Rafler

Stochastik für Informatiker (alt), (6LP)

Klausur

10. Oktober 2016

Name ______________________________ Matrikelnummer ____________________

Vorname ______________________________ Studiengang ____________________

Informationen

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt vollständig ist.

Schreiben Sie auf *jedes* von Ihnen benutzte Papier *sofort* Ihren Namen und Ihr Matrikelnummer.

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Mit 25 Punkten ist die Klausur bestanden. Als Hilfsmittel darf, wie angekündigt, ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner benutzt werden. Weitere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.

Geben Sie stets den *vollständigen* Rechenweg an. Begründen Sie Ihre Schritte falls notwendig.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1 *10 Punkte*

Ein Mobilfunkanbieter bekommt den Hinweis, dass in 87% seiner vertriebenen Telefone der Akku einen Fehler aufweist. Es läßt auf diesen Telefonen ein Testprogramm zur Diagnose von Fehlern laufen, das dann entweder einen Fehler meldet oder, sofern es keinen Fehler findet, eine Meldung, dass es kein Problem gibt. 15% aller Meldungen sind Fehlermeldungen. Bei weiterer Überprüfung des Testprogramms wurde festgestellt, dass der Akku in 90%, in denen ein Fehler gemeldet wurde auch tatsächlich defekt war. Bezeichne mit F das Ereignis, dass ein Testprogramm eine Fehlermeldung ausgibt und mit A das Ereignis, dass der Akku einwandfrei funktioniert.

(a) Geben Sie $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(F)$ und $\mathbb{P}(A^c|F)$ an.

(b) Berechnen Sie

(i) $\mathbb{P}(A|F)$, (ii) $\mathbb{P}(F|A^c)$ (iii) $\mathbb{P}(A^c|F^c)$, (iv) $\mathbb{P}(A \cap F^c)$,

(c) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen für beliebige Ereignisse B und C wahr oder falsch sind:

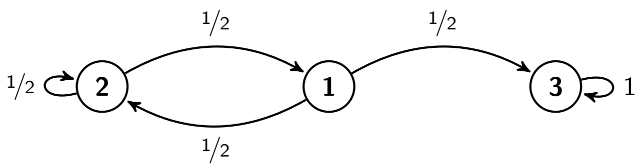
(i) $\mathbb{P}(B \cup C) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$;

(ii) $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, so sind B und C unabhängig;

(iii) $\mathbb{P}(B \cup C) > \mathbb{P}(B)$.

Aufgabe 2 *10 Punkte*

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $\{1, 2, 3\}$ und Übergangsgraph



(a) Geben Sie die Übergangsmatrix dieser Kette an. Ist die Kette irreduzibel? (kurze Begründung).

(b) Bestimmen Sie alle ggf. vorhandenen invarianten Verteilungen dieser Kette.

(c) Die Startverteilung der Kette sei $\nu = (1/2, 1/2, 0)^T$. Berechnen Sie

(i) Die Verteilung von X_2, (ii) $\mathbb{P}(X_0 \cdot X_2 = 1)$.

Aufgabe 3 *10 Punkte*

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit *Verteilungsfunktion*

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Dichte f_X der Zufallsvariablen X.

(b) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(i) $\mathbb{P}(X > 1)$, (ii) $\mathbb{P}(1/2 < X \leq 2)$

(c) Sei Y eine von X unabhängige Zufallsvariable mit gleicher Verteilung wie X. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der beiden Zufallsvariablen X und Y ihre Werte im Intervall $]1/2, 2]$ annimmt.

Aufgabe 4 *10 Punkte*

In einer Produktionslinie werden pro Tag 200 Geräte auf Funktionsfähigkeit überprüft. Ein getestetes Gerät passiert diese Qualitätskontrolle mit 92% Wahrscheinlichkeit. Sei X die Anzahl Geräte, welche an einem bestimmten Tag die Kontrolle passieren.

(a) Welche Verteilung hat X?
(b) Geben Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{V}(X)$ an.
(c) Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Approximation die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 20 Geräte die Kontrolle **nicht** passieren.
(d) Wie viele Geräte müssen Sie im Mittel testen, bis zum ersten Mal ein nicht funktionsfähiges dabei ist?

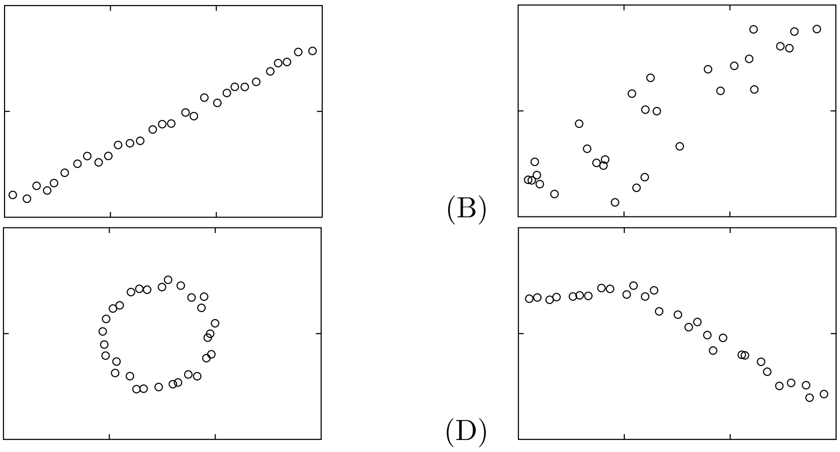
Aufgabe 5 *10 Punkte*

Sei $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter, und seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Dichte

$$f_\theta(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta & \text{falls } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Geben Sie die Likelihoodfunktion für eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ an.
(b) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\bar{\theta}_n$ für θ.
(c) Gegeben sind die folgenden Korrelationswerte und Plots von Datenpunkten

$$\rho_1 = 0.99, \quad \rho_2 = 0.4, \quad \rho_3 = -0.07, \quad \rho_4 = -0.92.$$



(A) (B) (C) (D)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Eine korrekte Zuordnung von Plot und Korrelation ist (B) zu ρ_1 und (C) zu ρ_3
(ii) Eine korrekte Zuordnung von Plot und Korrelation ist (A) zu ρ_1 und (D) zu ρ_4.
(iii) Der Anstieg einer Regressionsgeraden ist stets die Korrelation zwischen den Datenpunkten.
(iv) Für Bild (C) kann eine Regressionsgerade bestimmt werden.
(v) Der p-Wert ist für Bild (C) sehr groß.

Tabelle: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319