TU Berlin, Institut für Mathematik
SoSe 17

Dr. Mathias Rafler
Moritz Voß

Stochastik für Informatik, (6LP)
Klausur
24. Juli 2017

Name ______________________________ Matrikelnummer ____________________

Vorname ____________________________ Studiengang ______________________

Informationen

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt vollständig ist.

Schreiben Sie auf *jedes* von Ihnen benutzte Papier *sofort* Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Ab 25 Punkten ist die Klausur bestanden. Als Hilfsmittel darf, wie angekündigt, ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner benutzt werden. Weitere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.

Geben Sie immer den *vollständigen* Rechenweg an und *begründen* Sie Ihre Lösungsschritte.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1 12 *Punkte*

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit Zustandsraum $S = \{1,2,3,4\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } p \in [0,1].$$

(a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen.

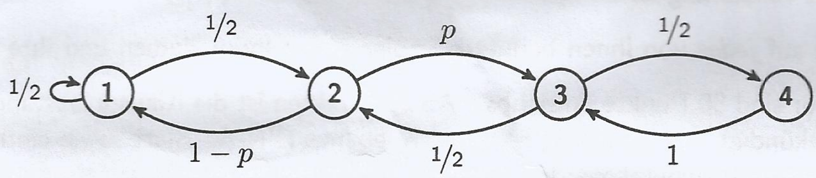
(b) Bestimmen Sie alle $p \in [0,1]$, so dass die Markovkette irreduzibel und aperiodisch ist.

(c) Sei nun $p = 1/2$. Berechnen Sie eine invariante Verteilung der Markovkette. Ist diese eindeutig?

(d) Sei nun $p = 1$. Die Startverteilung sei gegeben durch $\nu := (0, 1/4, 1/2, 1/4)^T$. Bestimmen Sie die Verteilung von X_1. Wie sieht die Verteilung von X_{103} aus?

Lösungsskizze zu Aufgabe 1.

(a) Der Übergangsgraph ist gegeben durch



(b) Wir machen folgende Fallunterscheidungen:

(i) $p = 0$: Die Kette ist nicht irreduzibel, da man z.B. von Zustand 1 oder 2 nicht in den Zustand 3 gelangt.

(ii) $p = 1$: Die Kette ist nicht irreduzibel, da man z.B. von Zustand 2 nicht in den Zustand 1 gelangt.

(iii) $0 < p < 1$: In diesem Fall ist die Kette irreduzibel, da man von jedem Zustand in endlich vielen Schritten zu jeden anderen Zustand gelangt. In diesem Fall ist die Kette aperiodisch, da der Zustand 1 die Periode 1 hat und alle anderen Zustände somit ebenfalls Periode 1 haben.

Also ist für $p \in (0,1)$ die Markovkette irreduzible und aperiodisch.

(c) Sei nun $p = 1/2$. Gesucht ist ein $\pi := (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)^T \in [0,1]^4$ derart, dass

$$(P-I)^T\pi = \left(\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^T \pi = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$ gilt. Aus der ersten Gleichung $-1/2 \cdot \pi_1 + 1/2 \cdot \pi_2 = 0$ folgt

$$\pi_1 = \pi_2.$$

Dies in die zweite Gleichung eingesetzt liefert $-1/2 \cdot \pi_1 + 1/2 \cdot \pi_3 = 0$ und damit

$$\pi_3 = \pi_2.$$

Eingesetzt in die vierte Gleichung $1/2 \cdot \pi_3 - \pi_4 = 0$ ergibt

$$\pi_4 = 1/2 \cdot \pi_1.$$

Und aus der Bedingung

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = \pi_1 \cdot (1 + 1 + 1 + 1/2) = \pi_1 \cdot 7/2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad \pi_1 = 2/7$$

folgt schließlich

$$\pi^T = (2/7, 2/7, 2/7, 1/2 \cdot 2/7) = 1/7 \cdot (2,2,2,1)\,.$$

Da die Markovkette irreduzibel ist, ist die invariante Verteilung π eindeutig.

(d) Sei nun $p = 1$ und $\nu^T = (0, 1/4, 1/2, 1/4)$. Für die Verteilung μ_1 von X_1 gilt:

$$\mu_1^T = \nu^T \cdot P = (0, 1/4, 1/2, 1/4) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 1/4, 1/2, 1/4) = \nu^T.$$

Insbesondere folgt damit, dass ν eine stationäre Verteilung ist. Und daher gilt dann auch für die Verteilung μ_{103} von X_{103}:

$$\mu_{103}^T = \nu^T \cdot P^{103} = \nu^T \cdot P \cdot P^{102} = \nu^T \cdot P^{102} = \ldots = \nu^T.$$

Aufgabe 2 *10 Punkte*

Eine Firma bekommt von einem Zulieferer Mikrochips, von denen typischerweise 1% einen Defekt hat. Es bezeichne D das Ereignis, dass ein Mikrochip defekt ist. Mithilfe eines Prüfgeräts werden alle Chips getestet. Dieses Gerät hat folgende Eigenschaften:

$$\mathbb{P}(W|D) = 0.997, \qquad \mathbb{P}(W^c|D^c) = 0.995.$$

Dabei bezeichnet W das Ereignis, dass das Gerät eine Warnung ausgibt.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{P}(W)$ und $\mathbb{P}(W^c)$.

(b) Berechnen Sie

 (i) die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Mikrochip fehlerfrei funktioniert, falls das Gerät nicht warnt;

 (ii) die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Mikrochip defekt ist, falls das Gerät warnt;

 (iii) die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mikrochip defekt ist und das Gerät keine Warnung ausgibt.

(c) Für die Durchführung eines einzelnen Tests fallen Kosten in Höhe von 5 Euro an. Hinzu kommen 20 Euro, falls der Test eine Warnung ausgibt und der Mikrochip deswegen aussortiert werden muss. Wird ein defekter Mikrochip nicht erkannt, entstehen durch die bereits erfolgte Weiterverarbeitung Folgekosten in Höhe von 200 Euro. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Unkosten (finanziellen Aufwendungen) für einen getesteten Mikrochip.

Lösungsskizze zu Aufgabe 2.

(a) Mithilfe der totalen Wahrscheinlichkeit angewandt auf $D \cup D^c = \Omega$ sowie der Wahrscheinlichkeit von Gegenereignissen sind

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W) &= \mathbb{P}(W|D^c) \cdot \mathbb{P}(D^c) + \mathbb{P}(W|D) \cdot \mathbb{P}(D) \\ &= 0.005 \cdot 0.99 + 0.997 \cdot 0.01 = 0.01492, \\ \mathbb{P}(W^c) &= 1 - \mathbb{P}(W) = 0.98508. \end{aligned}$$

(b) Gesucht sind $\mathbb{P}(D^c|W^c)$, $\mathbb{P}(D|W)$ sowie $\mathbb{P}(D \cap W)$, die sich mittels Formel von Bayes berechnen lassen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D^c|W^c) &= \frac{\mathbb{P}(W^c|D^c)\mathbb{P}(D^c)}{\mathbb{P}(W^c)} = \frac{0.995 \cdot 0.99}{0.98508} = 0.99997, \\ \mathbb{P}(D|W) &= \frac{\mathbb{P}(W|D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(W)} = \frac{0.997 \cdot 0.01}{0.01492} = 0.66823, \\ \mathbb{P}(D \cap W^c) &= \mathbb{P}(W^c|D) \cdot \mathbb{P}(D) = 0.003 \cdot 0.01 = 0.00003 \end{aligned}$$

(c) Nach Text sind die Kosten die ZV $K = 5 + 20 \cdot 1_W + 200 \cdot 1_{D \cap W^c}$, also

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K] &= 5 + 20\mathbb{P}(W) + 200\mathbb{P}(D \cap W^c) = 5.3044, \\ \mathbb{E}[K^2] &= 25 + 400\mathbb{P}(W) + 40000\mathbb{P}(D \cap W^c) + 200\mathbb{P}(W) + 2000\mathbb{P}(D \cap W^c) = 35.212, \\ \mathbb{V}(K) &= \mathbb{E}[K^2] - \mathbb{E}[K]^2 = 7.0753. \end{aligned}$$

Sinnvolles Runden ist in Ordnung.

Aufgabe 3 *10 Punkte*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) := \begin{cases} 2ax + b & \text{falls } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Bestimmen Sie a und b so, dass f die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X mit $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{3}$ ist.

(b) Berechnen Sie für $a = -1$ und $b = 2$ die Varianz einer Zufallsvariablen X mit Dichtefunktion f.

Lösungsskizze zu Aufgabe 3.

(a) Damit f die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X ist muss zunächst gelten:

(i) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = 1$.

Also stellen wir fest, dass auf jeden Fall notwendigerweise $b \geq 0$ gelten muss, damit (i) und (ii) erfüllt sein können.

Ferner erhalten wir aus (ii) die Bedingung

$$1 \stackrel{!}{=} \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = a \int_0^1 2x\, \mathrm{d}x + b = a + b.$$

Damit muss also $a = 1 - b$ gelten.

Damit der Erwartungswert von X mit Dichte f den Wert 0 annimmt muss gelten

$$\frac{1}{3} \stackrel{!}{=} \mathbb{E}[X] = \int_0^1 x f(x)\, \mathrm{d}x = 2a \int_0^1 x^2\, \mathrm{d}x + b \int_0^1 x\, \mathrm{d}x = \frac{2a}{3} + \frac{b}{2},$$

da $a = 1 - b$ erhält man $b = 2$.

(b) Es gilt

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \frac{1}{9}$$

und mit $a = -1$ und $b = 2$ gilt

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_0^1 x^2 f(x)\, \mathrm{d}x = (-2) \int_0^1 x^3\, \mathrm{d}x + 2 \int_0^1 x^2\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6},$$

d.h.

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

Aufgabe 4 *8 Punkte*

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte

$$f_\theta(x) := \begin{cases} 2\theta\, x\, \mathrm{e}^{-\theta x^2} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter sei.

Bestimmen Sie für eine gegebene Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$ von n unabhängigen Realisierungen von $X_1, \ldots, X_n$ den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$ des Parameters θ.

Lösungsskizze zu Aufgabe 4. Die Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$L(\theta; (x_1, \ldots, x_n)) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} 2\theta\, x_i\, e^{-\theta x_i^2} = (2\theta)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) \mathrm{e}^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Damit ergibt sich für die Loglikelihood-Funktion:

$$l(\theta;(x_1,\ldots,x_n)) = \ln\left(L(\theta;(x_1,\ldots,x_n))\right) = n\cdot\ln(2\theta) + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - \theta\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

Differentiation bezüglich θ liefert

$$\frac{\partial}{\partial\theta}l(\theta;(x_1,\ldots,x_n)) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

Nun gilt $\frac{\partial}{\partial\theta}l(\theta;(x_1,\ldots,x_n)) = 0$ genau dann wenn

$$\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}.$$

Ferner gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}l(\theta;(x_1,\ldots,x_n)) = -\frac{n}{\theta^2} < 0$$

für alle $\theta > 0$. Also ist der Maximum-Likelihood-Schätzer gegeben durch

$$\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}.$$

Aufgabe 5 *10 Punkte*

(a) Es bezeichne X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ mit $X(\Omega)=\{0,1\}$ und $Y(\Omega)=\{0,1,2,3\}$. Die gemeinsame Verteilung $p_{X,Y}$ von X und Y ist in nachfolgender Tabelle zusammengefasst:

x \ y	0	1	2	3
0	$4/20$	0	$4/20$	$5/20$
1	0	$2/20$	$2/20$	$3/20$

Bestimmen Sie jeweils

(i) die Randverteilungen von X und Y sowie die Verteilung von $Z := XY$;

(ii) die Kovarianz $\operatorname{cov}(X,Y)$;

(iii) die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \geq Y)$.

(b) Geben Sie bei jeder der folgenden Aussagen an, ob sie **wahr** oder **falsch** ist. Eine Begründung ist bei diesem Aufgabenteil **nicht** notwendig.

(i) Es gilt $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$ für zwei Zufallsvariablen X und Y.

(ii) Wenn X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen sind, so gilt $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\cdot p_Y(y)$ für alle $x\in X(\Omega)$ und $y \in Y(\Omega)$.

(iii) Wenn X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen sind, so gilt $\mathbb{E}[X\cdot Y] = \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$.

(iv) Wenn $X(\omega) = 3$ für alle $\omega\in\Omega$ gilt, dann ist $\mathbb{E}(X) = 3$ und $\mathbb{V}(X) = 1$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 5.

(a) (i) Für die Randverteilungen p_X und p_Y von X bzw. Y erhalten wir:

x \ y	0	1	2	3	p_X
0	$4/20$	0	$4/20$	$5/20$	$13/20$
1	0	$2/20$	$2/20$	$3/20$	$7/20$
p_Y	$4/20$	$2/20$	$6/20$	$8/20$	

Für die Zufallsvariable $Z = XY$ gilt $Z(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Die Verteilung p_Z von Z ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = 0) &= p_Z(0) = p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(0,1) + p_{X,Y}(0,2) + p_{X,Y}(0,3) + p_{X,Y}(1,0) = 13/20,\\
\mathbb{P}(Z = 1) &= p_Z(1) = p_{X,Y}(1,1) = 2/20,\\
\mathbb{P}(Z = 2) &= p_Z(2) = p_{X,Y}(1,2) = 2/20,\\
\mathbb{P}(Z = 3) &= p_Z(3) = p_{X,Y}(1,3) = 3/20.
\end{aligned}$$

(ii) Zunächst gilt

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y].$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= 7/20,\\
\mathbb{E}[Y] &= 2/20 + 12/20 + 24/20 = 38/20 = 19/10,\\
\mathbb{E}[XY] &= 2/20 + 4/20 + 9/20 = 15/20 = 3/4.
\end{aligned}$$

Und damit folgt dann

$$\operatorname{cov}(X,Y) = 15/20 - 7/20 \cdot 38/20 = 15/20 - 266/400 = 15/20 - 133/200 = 150/200 - 133/200 = 17/200.$$

(iii) Zunächst gilt

$$\mathbb{P}(X \geq Y) = \mathbb{P}(X = Y) + \mathbb{P}(X > Y).$$

Ferner gilt

$$\mathbb{P}(X = Y) = p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(1,1) = 4/20 + 2/20 = 6/20$$

sowie

$$\mathbb{P}(X > Y) = p_{X,Y}(1,0) = 0.$$

Und damit folgt dann

$$\mathbb{P}(X \geq Y) = 6/20.$$

(b) (i) falsch, (ii) falsch, (iii) wahr, (iv) falsch.