

**Stochastik für Informatiker, (6LP)
Klausur**

31. Juli 2018

Name _____ Matrikelnummer _____

Vorname _____ Studiengang _____

Informationen

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt vollständig ist. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann. (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO)
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist. (§39 Abs. 2 AllgStuPO)
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Schreiben Sie auf *jedes* von Ihnen benutzte Papier *sofort* Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Ab 25 Punkten ist die Klausur bestanden. Als Hilfsmittel darf, wie angekündigt, ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner benutzt werden. Weitere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.

Geben Sie immer den *vollständigen* Rechenweg an und *begründen* Sie Ihre Lösungsschritte. Ihre Lösung muss auch ohne Taschenrechner nachvollzogen werden können. Der Taschenrechner dient lediglich der Ausführung von elementaren Rechenoperationen.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1

10 Punkte

In einer Firma wird ein Werkstück von drei verschiedenen Maschinen produziert. Eine Lieferung enthält insgesamt 200 Werkstücke, für die gilt: 70 Werkstücke wurden von Maschine A produziert, davon ist eines defekt, 80 wurden von Maschine B produziert, davon sind 2 defekt, und 50 wurden von Maschine C produziert, davon sind 3 defekt. Wir wählen aus der Lieferung zufällig ein Werkstück aus, und betrachten die folgenden Ereignisse:

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{das Werkstück wurde von Maschine A produziert}\}, \\ B &:= \{\text{das Werkstück wurde von Maschine B produziert}\}, \\ C &:= \{\text{das Werkstück wurde von Maschine C produziert}\}, \\ D &:= \{\text{das Werkstück ist defekt}\}. \end{aligned}$$

- Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ und $\mathbb{P}(C)$, sowie $\mathbb{P}(D|A)$, $\mathbb{P}(D|B)$, $\mathbb{P}(D|C)$. Was bedeutet $\mathbb{P}(D|A)$ in Worten ausgedrückt?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig aus der Lieferung gezogenes Werkstück defekt?
- Ein zufällig aus der Lieferung gezogenes Werkstück ist defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es von Maschine A, bzw. von Maschine B, bzw. Maschine C?
- In obiger Firma wird ein Test verwendet, welcher ein defektes Teil mit 90% Wahrscheinlichkeit erkennt, mit 15% Wahrscheinlichkeit wird bei dem Test ein funktionierendes Teil fälschlich für defekt gehalten. Ein zufällig ausgewähltes Werkstück aus obiger Lieferung wird getestet. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test "defekt" anzeigt?

Aufgabe 2

10 Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & a & 0.6 \\ b & 0 & 0.7 \\ 0.2 & 0.8 & c \end{bmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die Zahlen a, b, c so, dass die Matrix stochastisch ist. Zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen, und geben Sie an, ob die zugehörige Markov-Kette irreduzibel ist.
- Bestimmen Sie alle gegebenenfalls vorhandenen invarianten Verteilungen der Markov-Kette zur stochastischen Matrix P .
- Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Markov-Kette zur Übergangsmatrix P . Bestimmen Sie
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_0 = 2)$,
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n]$.

Aufgabe 3

10 Punkte

Die gemeinsame Verteilung von X und Y sowie die Randverteilungen von X und Y sind in folgender unvollständiger Tabelle gegeben:

$X \backslash Y$	-1	0	1	$\mathbb{P}(X = k)$
-1		$\frac{3}{20}$	0	
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		
1	$\frac{1}{20}$			$\frac{1}{5}$
$\mathbb{P}(Y = k)$		$\frac{1}{4}$		

Die Zufallsvariable X habe Erwartungswert 0.

- Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X = -1)$ und $\mathbb{P}(X = 0)$.
Hinweis: Benutzen Sie die Information über $\mathbb{E}[X]$.
- Vervollständigen Sie die gegebene Tabelle.
- Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X gegeben $Y = 1$.
- Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X^2 und Y^2 .
- Sind X^2 und Y^2 unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4

10 Punkte

Eine Zeichenfolge wird über einen stark gestörten Kanal übermittelt. Jedes Zeichen kommt unabhängig von den anderen Zeichen mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.85$ korrekt an, andernfalls kommt es falsch an.

- Es werden insgesamt n Zeichen übermittelt. Sei X die Anzahl korrekt übermittelter Zeichen. Welche Verteilung hat X ? Geben Sie außerdem $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{V}(X)$ in Abhängigkeit von n an.
- Für $n = 10$ bestimme man die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Zeichen falsch ankommt.
- Für $n = 100$ bestimme man mittels Normalapproximation die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 10% der Zeichen falsch ankommt. Warum darf diese Approximation verwendet werden?

Aufgabe 5

10 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f_\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$f_\theta(x) = \begin{cases} a(b + \theta x^3) & , \text{ falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} ,$$

wobei $\theta \in [-1, 1]$ ein unbekannter Parameter sei.

- Bestimmen Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, sodass es sich bei f_θ für alle $\theta \in [-1, 1]$ um eine Dichte handelt.

Sei von nun an $a = \frac{1}{2}$ und $b = 1$ in der Definition von f_θ . Seien X_1, X_2, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte f_θ .

- Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X_1 .
- Zeigen Sie, dass der Schätzer $\theta_n(X_1, \dots, X_n) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ für den unbekannt Parameter θ , nicht erwartungstreu ist.
- Geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer $\tilde{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ für den unbekannt Parameter θ an.

Tabelle: $\Phi_{0,1}(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable X

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986