TU Berlin, Institut für Mathematik — Prof. Dr. Noemi Kurt
SoSe 18 — Lukas Wessels

Stochastik für Informatik, (9LP)

Klausur

31. Juli 2018

Name ______________________ Matrikelnummer ______________

Vorname ______________________ Studiengang ______________

Informationen

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt vollständig ist. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann. (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO)
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist. (§39 Abs. 2 AllgStuPO)
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Schreiben Sie auf *jedes* von Ihnen benutzte Papier *sofort* Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Ab 25 Punkten ist die Klausur bestanden. Als Hilfsmittel darf, wie angekündigt, ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner benutzt werden. Weitere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.

Geben Sie immer den *vollständigen* Rechenweg an und *begründen* Sie Ihre Lösungsschritte. Ihre Lösung muss auch ohne Taschenrechner nachvollzogen werden können. Der Taschenrechner dient lediglich der Ausführung von elementaren Rechenoperationen.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1 *10 Punkte*

Gegeben sei die Matrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & a & 0.6 \\ b & 0 & 0.7 \\ 0.2 & 0.8 & c \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Zahlen a, b, c so, dass die Matrix stochastisch ist. Zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen, und geben Sie an, ob die zugehörige Markov-Kette irreduzibel ist.

(b) Bestimmen Sie alle gegebenenfalls vorhandenen invarianten Verteilungen der Markov-Kette zur stochastischen Matrix P.

(c) Gegeben seien zusätzlich Sprungraten $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 1$. Geben Sie die Q-Matrix der zugehörigen Markov-Kette in stetiger Zeit an, und erklären Sie kurz die Bedeutung der Sprungraten für das Verhalten der Markovkette.

Aufgabe 2 *10 Punkte*

Die gemeinsame Verteilung von X und Y sowie die Randverteilungen von X und Y sind in folgender unvollständiger Tabelle gegeben:

$X \backslash Y$	-1	0	1	$\mathbb{P}(X = k)$
-1		$3/20$	0	
0	$1/4$	$1/4$		
1	$1/20$			$1/5$
$\mathbb{P}(Y = k)$			$1/4$	

Die Zufallsvariable X habe Erwartungswert 0.

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X = -1)$ und $\mathbb{P}(X = 0)$.
Hinweis: Benutzen Sie die Information über $\mathbb{E}[X]$.

(b) Vervollständigen Sie die gegebene Tabelle.

(c) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X gegeben $Y = 1$.

(d) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X^2 und Y^2.

(e) Sind X^2 und Y^2 unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 *10 Punkte*

Eine Zeichenfolge wird über einen stark gestörten Kanal übermittelt. Jedes Zeichen kommt unabhängig von den anderen Zeichen mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.85$ korrekt an, andernfalls kommt es falsch an.

(a) Es werden insgesamt n Zeichen übermittelt. Sei X die Anzahl korrekt übermittelter Zeichen. Welche Verteilung hat X? Geben Sie außerdem $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{V}(X)$ in Abhängigkeit von n an.

(b) Für $n = 10$ bestimme man die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Zeichen falsch ankommt.

(c) Für $n = 100$ bestimme man mittels Normalapproximation die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 10% der Zeichen falsch ankommt. Warum darf diese Approximation vewendet werden?

Aufgabe 4 *10 Punkte*

Lena hat eine Trickspielmünze gefunden und vermutet, dass sie nicht fair ist. Sie möchte einen χ^2-Test auf Gleichverteilung durchführen, um sich von ihrer Vermutung zu überzeugen.

(a) Stellen Sie eine geeignete Nullhypothese H_0 und Alternativhypothese H_A auf.

(b) Bestimmen Sie den Freiheitsgrad und das für den Test relevante Quantil zum Fehlerniveau $\alpha = 0.05$.

(c) Sei $k \in \{0, 1, \dots, 10\}$ die Anzahl der Köpfe bei 10 Münzwürfen. Berechnen Sie die Teststatistik (=Testwert) in Abhängigkeit von k.

(d) Für welche Werte von k lässt sich Lenas Vermutung zum Fehlerniveau $\alpha = 0.05$ stützen?

Aufgabe 5 *10 Punkte*

Gegeben sei die Funktion $f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$f_\theta(x) = \begin{cases} a(b + \theta x^3) & , \text{falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $\theta \in [-1, 1]$ ein unbekannter Parameter sei.

(a) Bestimmen Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, sodass es sich bei f_θ für alle $\theta \in [-1, 1]$ um eine Dichte handelt.

Sei von nun an $a = \frac{1}{2}$ und $b = 1$ in der Definition von f_θ. Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte f_θ.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X_1.

(c) Zeigen Sie, dass der Schätzer $\theta_n(X_1, \dots, X_n) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ für den unbekannten Parameter θ, nicht erwartungstreu ist.

(d) Geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer $\tilde{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ für den unbekannten Parameter θ an.

Tabelle: $\Phi_{0,1}(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable X

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Tabelle: Quantile $\chi^2_{\beta,f}$ der χ^2-Verteilung für die Freiheitsgrade $f \in \{1,2,3,4\}$ und Signifikanzniveaus $\beta \in \{0.01, 0.025, 0.05, 0.95, 0.975, 0.99\}$.

Freiheitsgrad f	$\chi^2_{0.01,f}$	$\chi^2_{0.025,f}$	$\chi^2_{0.05,f}$	$\chi^2_{0.95,f}$	$\chi^2_{0.975,f}$	$\chi^2_{0.99,f}$
$f = 1$	0.00016	0.00098	0.0039	3.84	5.02	6.63
$f = 2$	0.0201	0.0506	0.1026	5.99	7.38	9.21
$f = 3$	0.115	0.216	0.352	7.81	9.35	11.34
$f = 4$	0.297	0.484	0.711	9.49	11.14	13.28