TU Berlin, Institut für Mathematik Prof. Dr. Noemi Kurt
SoSe 18 Lukas Wessels

Stochastik für Informatiker, (6LP)
Musterlösung

31. Juli 2018

Aufgabe 1 *10 Punkte*

In einer Firma wird ein Werkstück von drei verschiedenen Maschinen produziert. Eine Lieferung enthält insgesamt 200 Werkstücke, für die gilt: 70 Werkstücke wurden von Maschine A produziert, davon ist eines defekt, 80 wurden von Maschine B produziert, davon sind 2 defekt, und 50 wurden von Maschine C produziert, davon sind 3 defekt. Wir wählen aus der Lieferung zufällig ein Werkstück aus, und betrachten die folgenden Ereignisse:

$$\begin{aligned}
A &:= \{\text{das Werkstück wurde von Maschine A produziert}\},\\
B &:= \{\text{das Werkstück wurde von Maschine B produziert}\},\\
C &:= \{\text{das Werkstück wurde von Maschine C produziert}\},\\
D &:= \{\text{das Werkstück ist defekt}\}.
\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)$ und $\mathbb{P}(C)$, sowie $\mathbb{P}(D|A), \mathbb{P}(D|B), \mathbb{P}(D|C)$. Was bedeutet $\mathbb{P}(D|A)$ in Worten ausgedrückt?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig aus der Lieferung gezogenes Werkstück defekt?

(c) Ein zufällig aus der Lieferung gezogenes Werkstück ist defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es von Maschine A, bzw. von Maschine B, bzw. Maschine C?

(d) In obiger Firma wird ein Test verwendet, welcher ein defektes Teil mit 90% Wahrscheinlichkeit erkennt, mit 15% Wahrscheinlichkeit wird bei dem Test ein funktionierendes Teil fälschlich für defekt gehalten. Ein zufällig ausgewähltes Werkstück aus obiger Lieferung wird getestet. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test "defekt" anzeigt?

Lösungsskizze zu Aufgabe 1.

(a)
$$\mathbb{P}(A) = \frac{70}{200} = \frac{7}{20} = 0.35, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{80}{200} = \frac{2}{5} = 0.4, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{50}{200} = \frac{1}{4} = 0.25.$$
$$\mathbb{P}(D|A) = \frac{1}{70} = 0.0143, \quad \mathbb{P}(D|B) = \frac{1}{40} = 0.025, \quad \mathbb{P}(D|C) = \frac{3}{50} = 0.06.$$

$\mathbb{P}(D|A)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Werkstück defekt ist, falls es von Maschine A produziert.

(b) Mit der Formel von der Gesamtwahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D|C)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{200} + \frac{1}{100} + \frac{3}{200} = \frac{3}{100} = 0.03$$

(c) Mit der Bayes-Formel

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|D) &= \frac{\mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{1/200}{3/100} = 1/6 = 0.166...\\
\mathbb{P}(B|D) &= \frac{\mathbb{P}(D|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{1/100}{3/100} = 1/3 = 0.33...\\
\mathbb{P}(C|D) &= \frac{\mathbb{P}(D|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{6/200}{3/100} = 1/2 = 0.5.
\end{aligned}$$

(d) Sei T das Ereignis, dass der Test positiv ausfällt (d.h. das Ergebnis “defekt” meldet). Mit der Formel von der Gesamtwahrscheinlichkeit bzw. der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T) =& \mathbb{P}(T \cap D) + \mathbb{P}(T \cap D^c) = \mathbb{P}(T|D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T|D^c)\mathbb{P}(D^c) \\ =& \frac{3}{100}\frac{90}{100} + \frac{97}{100}\frac{15}{100} = 0.027 + 0.1455 = 0.1725.\end{aligned}$$

Aufgabe 2 *10 Punkte*

Gegeben sei die Matrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & a & 0.6 \\ b & 0 & 0.7 \\ 0.2 & 0.8 & c \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Zahlen a, b, c so, dass die Matrix stochastisch ist. Zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen, und geben Sie an, ob die zugehörige Markov-Kette irreduzibel ist.

(b) Bestimmen Sie alle gegebenenfalls vorhandenen invarianten Verteilungen der Markov-Kette zur stochastischen Matrix P.

(c) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Markov-Kette zur Übergangsmatrix P. Bestimmen Sie

  (i) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1 \,|\, X_0 = 2)$,

  (ii) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 2.

(a) Da die Zeilensummen jeweils 1 ergeben müssen, folgt $a = 0.4, b = 0.3, c = 0$. *Skizze.* Die Markov-Kette ist irreduzibel, da man von jedem Zustand aus jeden anderen Zustand erreichen kann (sieht man an der Skizze, bzw. direkt an den Übergangswahrscheinlichkeiten, denn $p_{i,j} \neq 0$ für jedes Paar $i \neq j$.)

(b) Zu lösen ist das Gleichungssystem $\pi^T P = \pi^T, \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, bzw. $(P - I)^T \pi = 0, \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Dies führt auf

$$\begin{aligned} 0.3\pi_2 + 0.2\pi_3 &= \pi_1 \\ 0.4\pi_1 + 0.8\pi_3 &= \pi_2 \\ 0.6\pi_1 + 0.7\pi_2 &= \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

Lösen mittels Gauss-Algorithmus oder mittels direkter Rechnungen führt auf die eindeutige Lösung $\pi = (1/5, 2/5, 2/5)^T = (0.2, 0.4, 0.4)^T$.

(c) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1|X_0 = 2) = \pi_1 = 1/5$, und

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = 1\pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 = 0.2 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.4 = 2.2$$

Aufgabe 3 *10 Punkte*

Die gemeinsame Verteilung von X und Y sowie die Randverteilungen von X und Y sind in folgender unvollständiger Tabelle gegeben:

X \ Y	-1	0	1	$\mathbb{P}(X = k)$
-1		3/20	0	
0	1/4	1/4		
1	1/20			1/5
$\mathbb{P}(Y = k)$			1/4	

Die Zufallsvariable X habe Erwartungswert 0.

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X = -1)$ und $\mathbb{P}(X = 0)$.
Hinweis: Benutzen Sie die Information über $\mathbb{E}[X]$.

(b) Vervollständigen Sie die gegebene Tabelle.

(c) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X gegeben $Y = 1$.

(d) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X^2 und Y^2.

(e) Sind X^2 und Y^2 unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsskizze zu Aufgabe 3.

(a) Aus $\mathbb{E}[X] = 0$ folgt $\mathbb{P}(X = -1) = 1/5$ und $\mathbb{P}(X = 0) = 3/5$.

(b) Die Lösung ist in der Tabelle:

$X \backslash Y$	-1	0	1	p_X	$p_{X\|Y=1}$
-1	$1/20$	$3/20$	0	$1/5$	0
0	$1/4$	$1/4$	$1/10$	$3/5$	$2/5$
1	$1/20$	0	$3/20$	$1/5$	$3/5$
p_Y	$7/20$	$2/5$	$1/4$		

(c) siehe Tabelle in (b).

(d) Die Lösung ist in der Tabelle:

$X^2 \backslash Y^2$	0	1	p_{X^2}
0	$1/4$	$7/20$	$12/20$
1	$3/20$	$1/4$	$8/20$
p_{Y^2}	$8/20$	$12/20$	

(e) X^2 und Y^2 sind nicht unabhängig, da $p_{X^2}(0)p_{Y^2}(0) \neq \mathbb{P}(X = 0, Y = 0)$.

Aufgabe 4 *10 Punkte*

Eine Zeichenfolge wird über einen stark gestörten Kanal übermittelt. Jedes Zeichen kommt unabhängig von den anderen Zeichen mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.85$ korrekt an, andernfalls kommt es falsch an.

(a) Es werden insgesamt n Zeichen übermittelt. Sei X die Anzahl korrekt übermittelter Zeichen. Welche Verteilung hat X? Geben Sie außerdem $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{V}(X)$ in Abhängigkeit von n an.

(b) Für $n = 10$ bestimme man die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Zeichen falsch ankommt.

(c) Für $n = 100$ bestimme man mittels Normalapproximation die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 10% der Zeichen falsch ankommt. Warum darf diese Approximation vewendet werden?

Lösungsskizze zu Aufgabe 4.

(a) $X \sim \mathrm{Bin}(n, 0.85)$,
$\mathbb{E}[X] = 0.85n$,
$\mathrm{var}(X) = n \cdot 0.85 \cdot 0.15 = n \cdot 0.1275$.

(b) Mit X aus (a) folgt

$$\mathbb{P}(\text{höchstens 1 Zeichen falsch}) = \mathbb{P}(X \geq 9) = \mathbb{P}(X = 9) + \mathbb{P}(X = 10)$$
$$= \binom{10}{9} 0.85^9 \cdot 0.15 + \binom{10}{10} 0.85^{10} \approx 0.3474 + 0.1969 = 0.5443.$$

(c) 10% von $n = 100$ sind ≤ 10 falsche Zeichen, also $X > 100 - 10 = 90$ (für X definiert wie in (a)). Es gilt $\mathbb{E}[X] = 85$ und $\sigma = \sqrt{12.75} \approx 3.571$. Somit folgt, (nach dem Zentralen Grenzwertsatz bzw. wie in Beispiel 7.6) für $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 89) =&\mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{89-\mu}{\sigma}\right) \approx \mathbb{P}\left(Y \geq \frac{89-85}{3.571}\right)\\ =&1 - \mathbb{P}(Y \leq \frac{4}{3.571}) = 1 - \Phi_{0,1}(1.120) = 1 - 0.8686 = 0.1314.\end{aligned}$$

Die Approximation darf wegen des zentralen Grenzwertsatzes verwendet werden, und weil die Faustregel $np \geq 5$ und $n(1-p) \geq 5$ erfüllt ist.

Alternative Rechnung unter der Verwendung der 1/2-Korrektur (Satz 7.7 im Skript): $X \geq 89.5$, also

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 89.5) =&\mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{89.5-\mu}{\sigma}\right) \approx \mathbb{P}\left(Y \geq \frac{89.5-85}{3.571}\right)\\ =&1 - \mathbb{P}(Y \leq \frac{4.5}{3.571}) = 1 - \Phi_{0,1}(1.260) = 1 - 0.8962 = 0.1038.\end{aligned}$$

Aufgabe 5 *10 Punkte*

Gegeben sei die Funktion $f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$f_\theta(x) = \begin{cases} a(b + \theta x^3) & \text{, falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases},$$

wobei $\theta \in [-1,1]$ ein unbekannter Parameter sei.

(a) Bestimmen Sie alle Paare $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, sodass es sich bei f_θ für alle $\theta \in [-1,1]$ um eine Dichte handelt.

Sei von nun an $a = \frac{1}{2}$ und $b = 1$ in der Definition von f_θ. Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte f_θ.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X_1.

(c) Zeigen Sie, dass der Schätzer $\theta_n(X_1, \ldots, X_n) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ für den unbekannten Parameter θ, nicht erwartungstreu ist.

(d) Geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer $\tilde{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ für den unbekannten Parameter θ an.

Lösungsskizze zu Aufgabe 5.

(a) Es muss für alle $\theta \in [-1,1]$ gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\theta(x)\mathrm{d}x = 1,$$

also

$$\int_{-1}^{1} a(b + \theta x^3)\mathrm{d}x = 2ab = 1.$$

Daraus folgt schon $a, b \neq 0$ und $a = 1/(2b)$. Weiterhin muss gelten $f_\theta(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in [-1,1]$, also

$$a(b + \theta x^3) \geq 0 \quad \forall x, \theta \in [-1,1].$$

1. Fall: $a > 0$:

$$\begin{aligned} & b + \theta x^3 \geq 0 \quad \forall x, \theta \in [-1,1] \\ \iff & b \geq -\theta x^3 \quad \forall x, \theta \in [-1,1] \\ \iff & b \geq 1. \end{aligned}$$

2. Fall: $a < 0$:

$$\begin{aligned} & b + \theta x^3 \leq 0 \quad \forall x, \theta \in [-1, 1] \\ \iff & b \leq -\theta x^3 \quad \forall x, \theta \in [-1, 1] \\ \iff & b \leq -1. \end{aligned}$$

Also ist die Lösungsmenge

$$\left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | b \geq 1, a = 1/(2b)\right\} \cup \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | b \leq -1, a = 1/(2b)\right\}.$$

(b)

$$\mathbb{E}[X_1] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\theta(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x + \theta x^4 \mathrm{d}x = \frac{\theta}{5}.$$

(c)

$$\mathbb{E}[\theta_n(X_1, \ldots, X_n)] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \frac{\theta}{5}.$$

(d) $\tilde{\theta}(X_1, \ldots, X_n) := 5\theta_n(X_1, \ldots, X_n)$.