TU Berlin, Institut für Mathematik Prof. Dr. Noemi Kurt
SoSe 18 Lukas Wessels

Stochastik für Informatik, (9LP)

Klausur

02. Oktober 2018

Name ______________________ Matrikelnummer ______________

Vorname ______________________ Studiengang ______________

Informationen

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt vollständig ist. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann. (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO)
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist. (§39 Abs. 2 AllgStuPO)
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Schreiben Sie auf *jedes* von Ihnen benutzte Papier *sofort* Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Ab 25 Punkten ist die Klausur bestanden. Als Hilfsmittel darf, wie angekündigt, ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner benutzt werden. Weitere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.

Geben Sie immer den *vollständigen* Rechenweg an und *begründen* Sie Ihre Lösungsschritte. Ihre Lösung muss auch ohne Taschenrechner nachvollzogen werden können. Der Taschenrechner dient lediglich der Ausführung von elementaren Rechenoperationen.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1 *10 Punkte*

In einem Krankenhaus werden Patienten von drei verschiedenen Ärzten A, B und C behandelt. Arzt A behandelt 50%, Arzt B behandelt 20% und Arzt C 30% der Patienten. Unter den Diagnosen von Arzt A sind 3% falsch, von Arzt B sind 2% der Diagnosen falsch, und von Arzt C sind 5% der Diagnosen falsch.

(a) Definieren Sie sinnvolle Ereignisse zur Bearbeitung der Aufgabe und formulieren Sie die gegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe dieser Ereignisse.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine in diesem Krankenhaus gestellte Diagnose falsch?

(c) Gegeben dass eine falsche Diagnose gestellt wird, mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt sie von Arzt A, B oder C?

(d) Um die Diagnostik zu verbessern, kontrolliert neuerdings Arzt B die Diagnosen seiner Kollegen A und C, und entdeckt dabei 80% der falschen Diagnosen. Die Diagnosen von Arzt B werden nicht überprüft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird nach diesem neuen Verfahren eine falsche Diagnose gestellt?

Aufgabe 2 *10 Punkte*

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markov-Kette auf dem Zustandsraum $\{1,2,3,4\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie den Übergangsgraphen. Ist die Kette irreduzibel?

(b) Bestimmen Sie die Verteilung von X_2, falls $X_0 = 2$ ist.

(c) Bestimmen Sie alle gegebenenfalls vorhandenen invarianten Verteilungen der Kette.

(d) Was bedeutet das Ergebnis von (c) für das Langzeitverthalten der Kette, d.h. für $n \to \infty$? Erläutern Sie kurz (2-3 Sätze).

Aufgabe 3 *10 Punkte*

Es sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$, welche das Ergebnis beim einmaligen Werfen eines fairen Würfels beschreibt. Es sei Y die Zufallsvariable auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum, welche gegeben ist durch

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{falls } X(\omega) \text{ gerade ist,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von Y.

(b) Sei nun $Z := 1_{\{X\leq 4\}}$. Geben Sie in einer Tabelle die gemeinsame Verteilung von Y und Z an.

(c) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Y]$ und $\mathbb{E}[Z]$.

(d) Bestimmen Sie $\operatorname{cov}(Y,Z)$. Sind Y und Z unabhängig? Begründen Sie.

Aufgabe 4 *10 Punkte*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & 0 \leq x \leq 1, \\ b & -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie alle Paare $a, b \in \mathbb{R}$, so dass es sich bei f um eine Dichte handelt.

(b) Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von a und b, den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ der zugehörigen Zufallsvariablen X.

(c) Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von a und b, die Verteilungsfunktion F_X.

(d) Es sei nun $b = 0$. Skizzieren Sie f und markieren Sie in der Skizze die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \geq 1/2)$.

Aufgabe 5 *10 Punkte*

Es seien U_i, $i \in \mathbb{N}$ unabhängige, auf $[0, 1]$ uniform verteilte Zufallsvariablen.

(a) Es seien $V_i := 1_{\{U_i \leq 1/4\}}$ und $X := \min\{i : V_i = 1\}$. Welche Verteilung haben die V_i, welche Verteilung hat X?

(b) Geben Sie mit Hilfe der Zufallsvariablen U_i einen Monte-Carlo-Schätzer für $\int_0^1 \pi \sin(x)dx$ an.

(c) Finden Sie eine Funktion g, so dass $Y_i := g(U_i)$ Pareto-verteilt zum Parameter $\alpha > 1$ ist, d.h. die Verteilungsfunktion F von Y_i gegeben ist durch

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x^{-\alpha} & \text{falls } x \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$